

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MARCOS ARNDT

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS APLICADO À  
ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES DE ESTRUTURAS RETICULADAS

CURITIBA

2009

MARCOS ARNDT

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS APLICADO À  
ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES DE ESTRUTURAS RETICULADAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciências, Área de Concentração: Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado  
Co-orientador: Prof. Dr. Adriano Scremin

CURITIBA

2009


## TERMO DE APROVAÇÃO

**Marcos Arndt**


### **“O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas”**


Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Concentração em Mecânica Computacional, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:

  
Prof. Roberto Dalledone Machado, D. Eng.  
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos  
Departamento de Construção Civil - UFPR

Co-orientador:

  
Prof. Adriano Scremin, D. Sc.  
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos  
Departamento de Engenharia Mecânica - UFPR

  
Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph. D.  
Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC

  
Prof. Sérgio Persival Roencha, D. Sc.  
Departamento de Engenharia de Estruturas – EESC - USP

  
Prof. Renato Barbieri, D. Eng.  
Departamento de Engenharia Mecânica – UDESC / PUCPR

Curitiba, 05 de junho de 2009.

À Lilian, minha esposa, e aos meus filhos  
Rafaela e Giovani que são as pessoas  
mais importantes na minha vida.

Aos meus pais, Vitor e Zeni que me  
ensinaram os verdadeiros valores.

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus, pela vida, pela graça e misericórdia diárias.

À minha família por todo amor, paciência e apoio.

Ao professor Roberto Dalledone Machado, pela orientação, apoio, confiança, persistência, amizade e principalmente pelo exemplo.

Ao professor Adriano Scremin, pela orientação, apoio e pelas fundamentais idéias e sugestões ao trabalho.

Aos professores Sergio Scheer e Mildred B. Hecke pelo incentivo, amizade, apoio e confiança.

À Maristela Bandil pela amizade e, alegria e motivação em todas as ocasiões.

Aos amigos e professores do CESEC que me acolheram desde a graduação.

Aos amigos Flávia e Claudio pelo apoio, companheirismo e amizade.

Aos amigos e professores do curso de Engenharia Civil da Universidade Positivo pelo apoio e amizade.

Se não for o Senhor o construtor da casa, será inútil trabalhar na construção.  
Se não é o Senhor que vigia a cidade, será inútil a sentinela montar guarda.

Salmo 127:1 NVI

## RESUMO

O conhecimento do comportamento dinâmico das estruturas civis e mecânicas tem se tornado cada vez mais importante para um projeto seguro e otimizado. O Método dos Elementos Finitos (MEF) apresenta bons resultados para as primeiras frequências, porém demanda elevado custo computacional para atingir melhor precisão para altas frequências. O objetivo deste trabalho é investigar a aplicação do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) na análise de vibrações livres em estruturas reticuladas. O Método dos Elementos Finitos Generalizados, desenvolvido a partir do Método da Partição da Unidade, permite a inclusão de conhecimento prévio sobre a solução da equação diferencial sendo resolvida, no espaço de solução aproximado. Neste trabalho são propostos e analisados diversos elementos generalizados para análise da vibração livre de barras, eixos, vigas de Euler-Bernoulli, treliças e pórticos planos com diferentes funções enriquecedoras. São propostos refinamentos  $h$ ,  $p$  e adaptativo para o MEFG. As funções enriquecedoras do MEFG Adaptativo são dependentes da geometria, das propriedades mecânicas dos elementos e das condições de contorno. O problema variacional de vibração livre é formulado e os principais aspectos do MEFG são discutidos. A eficiência e a convergência do método proposto na vibração livre de estruturas reticuladas planas são verificadas. As frequências obtidas pelo MEFG são comparadas com aquelas obtidas por soluções analíticas, pelo Método Composto (MC), pelos refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF, e por outros métodos encontrados na literatura. O MEFG proposto permite a imposição das condições de contorno de forma direta, como no MEF, e apresenta taxas de convergência maiores do que o refinamento  $h$  do MEF e refinamento  $c$  do MC, e no mínimo semelhantes às taxas de convergência do refinamento  $p$  do MEF. O MEFG Adaptativo proposto converge muito rápido e permite aproximar a frequência relacionada com o modo de vibração desejado.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos Finitos Generalizados. Vibração livre. Análise dinâmica. Partição da unidade.

## ABSTRACT

The knowledge about the dynamic behavior of civil and mechanical structures has become very important for a safe and optimized design. The Finite Element Method (FEM) presents good results for the lowest frequencies but demands great computational cost to work up the accuracy for the higher frequencies. The objective of this work is to study the application of the Generalized Finite Element Method (GFEM) in free vibration analysis of framed structures. The Generalized Finite Element Method, developed from the Partition of Unity Method, allows the inclusion of a priori knowledge about the differential equation being solved in the approximated solution space. In this work several generalized elements to free vibration analysis of bars, shafts, Euler-Bernoulli beams, and plane trusses and frames with different enrichment functions are proposed and investigated. The  $h$ ,  $p$  and adaptive refinements of GFEM are proposed. The Adaptive GFEM enrichment functions are dependent on the geometric, mechanical properties of the elements and boundary conditions. The variational problem of free vibration is formulated and the main aspects of the GFEM are discussed. The efficiency and convergence of the proposed method in free vibration analysis of framed structures are checked. The frequencies obtained by the GFEM are compared with those obtained by the analytical solutions, the Composite Element Method (CEM), the  $h$  and  $p$ -versions of FEM, and other methods found in the literature. The GFEM allows to introduce the boundary conditions directly, as in the FEM, and presents convergence rates greater than  $h$ -version of FEM and  $c$ -version of CEM, and at least similar to the convergence rates of  $p$ -version of FEM. The proposed Adaptive GFEM converges very fast and is able to approximate the frequency related to the chosen vibration mode.

**Key words:** Generalized Finite Element Method. Free vibration. Dynamic analysis. Partition of unity.



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – NÚMERO DE FREQUÊNCIAS CONVERGINDO COM PRECISÃO MÍNIMA DE 1% - VIGA SIMPLEMENTE APOIADA .....	52
FIGURA 2.2 – FATORES INTENSIDADE DE MOMENTO (K1) NORMALIZADOS EM RELAÇÃO À LARGURA DA PLACA.....	61
FIGURA 2.3 – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO LINEAR DA ONDA NO TEMPO $t = 7,0$ ..	65
FIGURA 2.4 – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BURGERS NO TEMPO $t = 2,853$ .....	65
FIGURA 2.5 – TENSÕES $\sigma_{xx}$ (dyn/cm <sup>2</sup> ) PARA UM PLANO SEMI INFINITO .....	66
FIGURA 2.6 – ESQUEMA ITERATIVO .....	67
FIGURA 2.7 – CURVAS DE CONVERGÊNCIA PARA PLACA EXCITADA A 2000 HZ .....	69
FIGURA 3.1 – ESQUEMA DE ESPAÇOS DUAIS .....	75
FIGURA 3.2 – BARRA RETA COM DEFORMAÇÃO AXIAL.....	85
FIGURA 3.3 – ELEMENTO LINEAR DE BARRA .....	95
FIGURA 3.4 – ELEMENTO CÚBICO DE BARRA .....	96
FIGURA 3.5 – EIXO RETO COM DEFORMAÇÃO ANGULAR.....	100
FIGURA 3.6 – VIGA RETA COM DEFORMAÇÃO LATERAL.....	104
FIGURA 3.7 – ELEMENTO DE VIGA .....	113
FIGURA 3.8 – (a) FUNÇÃO B <sub>3</sub> -SPLINE TÍPICA; (b) BASE DE FUNÇÕES B <sub>3</sub> - SPLINE .....	115
FIGURA 3.9 – TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS PARA BARRA DE TRELIÇA.....	120
FIGURA 3.10 – TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS PARA BARRA DE PÓRTICO.....	123
FIGURA 4.1 – COBERTURA $\{\Omega_i\}$ DO DOMÍNIO $\Omega$ .....	127

FIGURA 4.2 – SUBDOMÍNIOS E FUNÇÕES PARTIÇÃO DA UNIDADE PARA MALHA DE ELEMENTOS UNIDIMENSIONAIS DO MEFG .....	130
FIGURA 4.3 – FUNÇÃO PARTIÇÃO DA UNIDADE E ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO LOCAL DO MEFG-1 PARA O ELEMENTO DE BARRA RETA NO SUBDOMÍNIO (1,3), COM $n_l = 1$ .....	133
FIGURA 4.4 – FUNÇÃO PARTIÇÃO DA UNIDADE E ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO LOCAL DO MEFG-2 PARA O ELEMENTO DE BARRA RETA NO SUBDOMÍNIO (1,3), COM $n_l = 1$ .....	135
FIGURA 4.5 – FUNÇÕES PARTIÇÃO DA UNIDADE E ENRIQUECEDORAS DO ELEMENTO MESTRE DE BARRA RETA DO MEFG-2, PARA $j = 1$ , $L_e$ $= 1$ E $\beta_1 = 3\pi/2$ .....	136
FIGURA 4.6 – FLUXOGRAMA DO MEFG ADAPTATIVO .....	139
FIGURA 4.7 – FLUXOGRAMA DO REFINAMENTO $p$ ADAPTATIVO DO MEFG ..	141
FIGURA 4.8 – FUNÇÃO PARTIÇÃO DA UNIDADE E ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO LOCAL DO MEFG MC E MEFG MMA PARA O ELEMENTO DE VIGA, NO SUBDOMÍNIO (1,3).....	145
FIGURA 4.9 – FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS DO ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO LOCAL DO MEFG TRIG PARA O ELEMENTO DE VIGA NO SUBDOMÍNIO (1,3) .....	146
FIGURA 4.10 – FUNÇÃO PARTIÇÃO DA UNIDADE E ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO LOCAL DO MEFG ADAPTATIVO PARA ELEMENTO DE VIGA, NO SUBDOMÍNIO (1,3).....	150
FIGURA 4.11 – FUNÇÕES PARTIÇÃO DA UNIDADE E ENRIQUECEDORAS DO ELEMENTO DE VIGA PARA $j = 1$ , $L_e = 1$ E $\beta_1 = 3\pi/2$ .....	152
FIGURA 5.1 – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	157
FIGURA 5.2 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – REFINAMENTO $h$ – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	159

FIGURA 5.3 – ERRO RELATIVO DO 2º AUTOVALOR – REFINAMENTO $h$ - BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	159
FIGURA 5.4 – ERRO RELATIVO DO 3º AUTOVALOR – REFINAMENTO $h$ – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	160
FIGURA 5.5 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – REFINAMENTO $h$ – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	160
FIGURA 5.6 – ERRO RELATIVO DO 5º AUTOVALOR – REFINAMENTO $h$ – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	161
FIGURA 5.7 – ERRO RELATIVO DO 6º AUTOVALOR – REFINAMENTO $h$ – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	161
FIGURA 5.8 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	163
FIGURA 5.9 – ERRO RELATIVO DO 2º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	164
FIGURA 5.10 – ERRO RELATIVO DO 3º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	164
FIGURA 5.11 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	165
FIGURA 5.12 – ERRO RELATIVO DO 5º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	165
FIGURA 5.13 – ERRO RELATIVO DO 6º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	166
FIGURA 5.14 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DE FREQUÊNCIA – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	167
FIGURA 5.15 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DE FREQUÊNCIA – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	168

FIGURA 5.16 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE – ANÁLISE 1: 1ª FREQUÊNCIA ALVO .....	170
FIGURA 5.17 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE – ANÁLISE 2: 2ª FREQUÊNCIA ALVO .....	171
FIGURA 5.18 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE – ANÁLISE 3: 3ª FREQUÊNCIA ALVO .....	171
FIGURA 5.19 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE – ANÁLISE 4: 4ª FREQUÊNCIA ALVO .....	171
FIGURA 5.20 – ERRO RELATIVO PARA O 2º AUTOVALOR PARA DIVERSAS RELAÇÕES DE MALHA – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	174
FIGURA 5.21 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ ADAPTATIVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	175
FIGURA 5.22 – ERRO RELATIVO DO 2º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ ADAPTATIVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	175
FIGURA 5.23 – ERRO RELATIVO DO 3º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ ADAPTATIVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	176
FIGURA 5.24 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ ADAPTATIVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	176
FIGURA 5.25 – ERRO RELATIVO DO 5º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ ADAPTATIVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	177
FIGURA 5.26 – ERRO RELATIVO DO 6º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ ADAPTATIVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	177
FIGURA 5.27 – BARRA UNIFORME FIXA-FIXA.....	178
FIGURA 5.28 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – BARRA UNIFORME FIXA-FIXA .....	179

FIGURA 5.29 – BARRA UNIFORME LIVRE-LIVRE.....	181
FIGURA 5.30 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – BARRA UNIFORME LIVRE-LIVRE .....	182
FIGURA 5.31 – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA NA EXTREMIDADE.....	183
FIGURA 5.32 – ERRO RELATIVO DAS FREQUÊNCIAS ALVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA.....	185
FIGURA 5.33 – BARRA FIXA-LIVRE BIMATERIAL .....	186
FIGURA 5.34 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – BARRA FIXA- LIVRE BIMATERIAL .....	188
FIGURA 5.35 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – BARRA FIXA- FIXA COM VARIAÇÃO DE ÁREA SENOIDAL .....	191
FIGURA 5.36 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – BARRA FIXA- FIXA COM VARIAÇÃO DE ÁREA POLINOMIAL .....	194
FIGURA 5.37 – EIXO CIRCULAR UNIFORME FIXO-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA.....	197
FIGURA 5.38 – EIXO CIRCULAR UNIFORME COM MOLA TORCIONAL .....	198
FIGURA 5.39 – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.....	200
FIGURA 5.40 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – REFINAMENTO $h$ – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.....	202
FIGURA 5.41 – ERRO RELATIVO DO 2º AUTOVALOR – REFINAMENTO $h$ – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.....	202
FIGURA 5.42 – ERRO RELATIVO DO 3º AUTOVALOR – REFINAMENTO $h$ – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.....	203
FIGURA 5.43 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – REFINAMENTO $h$ – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.....	203
FIGURA 5.44 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.....	204

FIGURA 5.45 – ERRO RELATIVO DO 2º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.....	205
FIGURA 5.46 – ERRO RELATIVO DO 3º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.....	205
FIGURA 5.47 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.....	206
FIGURA 5.48 – ERRO RELATIVO DO 5º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.....	206
FIGURA 5.49 – ERRO RELATIVO DO 6º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.....	207
FIGURA 5.50 – ERRO RELATIVO DO 7º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.....	207
FIGURA 5.51 – ERRO RELATIVO DO 8º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.....	208
FIGURA 5.52 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE – ANÁLISE 1: 1ª FREQUÊNCIA ALVO.....	211
FIGURA 5.53 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE – ANÁLISE 2: 2ª FREQUÊNCIA ALVO.....	212
FIGURA 5.54 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE – ANÁLISE 3: 3ª FREQUÊNCIA ALVO.....	212
FIGURA 5.55 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE – ANÁLISE 4: 4ª FREQUÊNCIA ALVO.....	212
FIGURA 5.56 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE NAS DUAS PRIMEIRAS ITERAÇÕES DO MEFG ADAPTATIVO – ANÁLISE 2: 2ª FREQUÊNCIA ALVO .....	214

FIGURA 5.57 – VIGA UNIFORME BI-ROTULADA .....	215
FIGURA 5.58 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME SIMPLESMENTE APOIADA .....	216
FIGURA 5.59 – ERRO RELATIVO DO 2º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME SIMPLESMENTE APOIADA .....	217
FIGURA 5.60 – ERRO RELATIVO DO 3º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME SIMPLESMENTE APOIADA .....	217
FIGURA 5.61 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME SIMPLESMENTE APOIADA .....	218
FIGURA 5.62 – ERRO RELATIVO DO 5º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME SIMPLESMENTE APOIADA .....	218
FIGURA 5.63 – ERRO RELATIVO DO 6º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME SIMPLESMENTE APOIADA .....	219
FIGURA 5.64 – ERRO RELATIVO DO 7º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME SIMPLESMENTE APOIADA .....	219
FIGURA 5.65 – ERRO RELATIVO DO 8º AUTOVALOR – REFINAMENTO $p$ – VIGA UNIFORME SIMPLESMENTE APOIADA .....	220
FIGURA 5.66 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – VIGA UNIFORME SIMPLESMENTE APOIADA .....	221
FIGURA 5.67 – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA NA EXTREMIDADE.....	223
FIGURA 5.68 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – VIGA ENGASTADA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA.....	225
FIGURA 5.69 – VIGA UNIFORME BI-ENGASTADA COM RÓTULA INTERNA .....	227
FIGURA 5.70 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – VIGA COM RÓTULA INTERNA .....	228
FIGURA 5.71 – VIGA ENGASTADA-ROTULADA BIMATERIAL .....	230
FIGURA 5.72 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – VIGA ENGASTADA-ROTULADA BIMATERIAL .....	233

FIGURA 5.73 – VIGA CONTÍNUA BIMATERIAL.....	234
FIGURA 5.74 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES – VIGA ENGASTADA- ROTULADA COM VARIAÇÃO POLINOMIAL DE ÁREA E INÉRCIA .....	239
FIGURA 5.75 – TRELIÇA COMPOSTA POR 7 BARRAS.....	240
FIGURA 5.76 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA DE 7 BARRAS....	242
FIGURA 5.77 – TRELIÇA COMPOSTA POR 15 BARRAS.....	243
FIGURA 5.78 – QUINTO MODO DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA DE 15 BARRAS ...	244
FIGURA 5.79 – PÓRTICO PLANO .....	245
FIGURA 5.80 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DO PÓRTICO .....	248



## LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1 – TEORIAS PARA VIGAS.....	41
TABELA 2.2 – NÚMERO DE FREQUÊNCIAS COM UMA PRECISÃO $p\%$ OU MELHOR – BARRA LIVRE-LIVRE.....	51
TABELA 2.3 – NÚMERO DE FREQUÊNCIAS COM UMA PRECISÃO $p\%$ OU MELHOR – VIGA SIMPLEMENTE APOIADA.....	51
TABELA 2.4 – FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA VIGA NÃO UNIFORME .....	55
TABELA 5.1 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA DOS REFINAMENTOS $h$ – BARRA FIXA-LIVRE .....	162
TABELA 5.2 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DA BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE .....	173
TABELA 5.3 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE BARRA UNIFORME FIXA-FIXA.....	180
TABELA 5.4 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE BARRA UNIFORME LIVRE-LIVRE.....	182
TABELA 5.5 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA BARRA FIXA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA .....	184
TABELA 5.6 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE BARRA FIXA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA.....	185
TABELA 5.7 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DOS AUTOVALORES DA BARRA FIXA- LIVRE BIMATERIAL .....	187
TABELA 5.8 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE BARRA BIMATERIAL .....	189
TABELA 5.9 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DA BARRA FIXA-FIXA COM VARIAÇÃO DE ÁREA SENOIDAL .....	191

TABELA 5.10 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DA BARRA FIXA-FIXA COM VARIAÇÃO DE ÁREA SENOIDAL – MEF $p$ COM QUADRATURA DE GAUSS .....	192
TABELA 5.11 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DA BARRA FIXA-FIXA COM VARIAÇÃO DE ÁREA POLINOMIAL.....	195
TABELA 5.12 – RESULTADO DO MEFG ADAPTATIVO PARA BARRA FIXA-FIXA COM VARIAÇÃO DE ÁREA POLINOMIAL E MALHA MAIS REFINADA.....	196
TABELA 5.13 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE EIXO FIXO-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA.....	198
TABELA 5.14 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE EIXO COM MOLA TORCIONAL .....	199
TABELA 5.15 – AUTOVALORES PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE (8 GRAUS DE LIBERDADE) .....	209
TABELA 5.16 – AUTOVALORES PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE (12 GRAUS DE LIBERDADE) .....	210
TABELA 5.17 – ERROS RELATIVOS DO MEFG ADAPTATIVO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM DIFERENTES MALHAS .....	213
TABELA 5.18 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE .....	214
TABELA 5.19 – ERROS RELATIVOS DO MEFG ADAPTATIVO PARA VIGA SIMPLESMENTE APOIADA COM DIFERENTES MALHAS .....	222
TABELA 5.20 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA UNIFORME SIMPLESMENTE APOIADA .....	222
TABELA 5.21 – SOLUÇÃO ANALÍTICA DOS AUTOVALORES DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA.....	224

TABELA 5.22 – ERROS RELATIVOS DO MEFG ADAPTATIVO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA PARA DIFERENTES MALHAS .....	225
TABELA 5.23 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA.....	226
TABELA 5.24 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DOS AUTOVALORES DA VIGA BI- ENGASTADA COM RÓTULA INTERNA .....	227
TABELA 5.25 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA COM RÓTULA INTERNA .....	229
TABELA 5.26 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DOS AUTOVALORES DA VIGA ENGASTADA-ROTULADA BIMATERIAL .....	231
TABELA 5.27 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA BIMATERIAL ENGASTADA-ROTULADA.....	233
TABELA 5.28 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA CONTÍNUA BIMATERIAL .....	236
TABELA 5.29 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DOS AUTOVALORES DA VIGA ENGASTADA-ROTULADA COM VARIAÇÃO POLINOMIAL DE ÁREA E INÉRCIA .....	238
TABELA 5.30 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA ENGASTADA- ROTULADA COM VARIAÇÃO POLINOMIAL DE ÁREA E INÉRCIA .....	238
TABELA 5.31 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE TRELIÇA PLANA COM 7 BARRAS.....	241
TABELA 5.32 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE TRELIÇA PLANA DE 15 BARRAS .....	243
TABELA 5.33 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE PÓRTICO PLANO.	245
TABELA 5.34 – RESULTADOS DA ANÁLISE DO MEFG ADAPTATIVO PARA 1ª FREQUÊNCIA ALVO.....	247

## LISTA DE SIGLAS

MC – Método Composto

MEF – Método dos Elementos Finitos

MEFG – Método dos Elementos Finitos Generalizados

MEFG Adaptativo - Método dos Elementos Finitos Generalizados Adaptativo

MEFG MC – MEFG com funções enriquecedoras baseadas no MC

MEFG MMA – MEFG com funções enriquecedoras baseadas no MMA

MEFG Trig – MEFG com funções enriquecedoras trigonométricas

MEF Fourier – Método dos Elementos Finitos  $p$ -Fourier

MEFS – Método dos Elementos Finitos Spline

MMA – Método dos Modos Admissíveis

MMT – Método da Matriz de Transferência

MPU – Método da Partição da Unidade

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$  – constante

$a_1, a_2$  – constantes das soluções analíticas

$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$  – graus de liberdade de campo

$A$  – operador linear compacto

$A^X$  - operador adjunto de  $A$

$A, A_1, A_2$  – área da seção transversal

$A_0$  – área da seção transversal na extremidade esquerda da viga

$A_1, A_2$  – constantes das soluções analíticas

$A_d, A_e$  – área da seção transversal nos subdomínios  $(x_{i-1}, x_i)$  e  $(x_i, x_{i+1})$

$b$  – constante

$b_1, b_2, b_3, b_4$  – constantes das soluções analíticas

$B$  – forma bilinear

$B_1, B_2$  – constantes das soluções analíticas

$c$  – velocidade de onda

$\mathbf{c}$  – vetor de graus de liberdade de campo

$c_1, c_2$  – constantes

$c_{bi}$  – graus de liberdade de campo para deformação axial

$c_i$  – constante

$c_{vi}$  – graus de liberdade de campo para deformação transversal

$C$  – plano complexo

$C^k$  – espaço das funções contínuas até a derivada de ordem  $k$

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_{2r}, C_{3r}, C_{4r}$  – termos constantes da solução analítica para vigas

$C_\infty, C_G$  - constantes do MPU

$D(T)$  – domínio do operador  $T$

$e$  – erro absoluto da solução aproximada

$erro$  – erro relativo da solução aproximada

$E, E_1, E_2$  – módulo de elasticidade longitudinal

$E_d, E_e$  – módulo de elasticidade longitudinal nos subdomínios  $(x_{i-1}, x_i)$  e  $(x_i, x_{i+1})$

$f$  – função integrável arbitrária

$f$  – funcional linear

$F$  – forma bilinear associada ao operador  $Q$

$F_r$  – função enriquecedora

$g$  – funcional linear

$g_k$  – soluções de  $A^X g = 0$

$G$  – módulo de elasticidade transversal

$h$  – diâmetro máximo dos elementos da malha

$h$  – dimensão da subdivisão da viga no MEFS

$H, H_1, H_2$  – espaços de Hilbert

$H^{h(\perp)}$  - complemento ortogonal de  $H^h$  em  $H$

$I$  – momento de inércia da seção transversal

$I$  – operador identidade

$I_0, I_{0D}, I_{0E}$  – inércias rotacionais das massas

$I_{0f}$  – inércia da seção transversal na extremidade esquerda da viga

$I_d, I_e$  – momento de inércia da seção transversal nos subdomínios  $(x_{i-1}, x_i)$  e  $(x_i, x_{i+1})$

$I_{MD}, I_{ME}$  – momento de inércia de massa nas extremidades direita e esquerda

$I_p$  – momento polar de inércia

$J_v$  - função de Bessel de primeiro tipo e ordem  $v$

$k$  – grau da base polinomial

$k, k_D, k_E$  – rigidez de mola longitudinal ou torcional

$k_c$  – constante característica do subespaço de aproximação

$k_{ij}^e$  - coeficientes da matriz de rigidez elementar

$k_{RD}, k_{RE}$  – rigidez de mola rotacional nas extremidades direita e esquerda

$k_{TD}, k_{TE}$  – rigidez de mola transversal nas extremidades direita e esquerda

$K$  – parâmetro para estimativa de erro

$\mathbf{K}$  – matriz de rigidez no sistema local

$\mathbf{K}_G$  – matriz de rigidez no sistema global

$L, L_1, L_2, L_3$  – comprimento

$L_e$  – comprimento do elemento

$L^2$  – espaço das funções quadrado integráveis

$m$  – número de divisões da viga no MEFS

$m$  – número de funções enriquecedoras de viga

$m$  – ordem do operador linear

$m, m_D, m_E$  – massa concentrada

$m_{ij}^e$  - coeficientes da matriz de massa elementar

$M$  – constante de continuidade

$M$  – momento fletor

$M$  – subconjunto limitado de um espaço normado  $X$

$M_S$  – constante de sobreposição de subdomínios

$\mathbf{M}$  – matriz de massa no sistema local

$\mathbf{M}_G$  – matriz de massa no sistema global

$n$  – dimensão do espaço

$n$  – número de autovetores e autovalores aproximados

$n$  – número de funções enriquecedoras de barra

$n$  – potência da distribuição polinomial de área

$n_l$  – número de níveis de enriquecimento

$n_{l,max}$  – número máximo de níveis de enriquecimento

$ngl$  – número de graus de liberdade

$N$  – número de nós

$N$  – número total de graus de liberdade

$\mathbf{N}$  – vetor de funções de forma

$p$  – grau do polinômio interpolador

$P$  – operador linear

$p(x,t)$  – força axial por unidade de comprimento da barra

$p(x,t)$  – força transversal por unidade de comprimento da viga

$p(x,t)$  – momento torsor por unidade de comprimento do eixo

$q_{Ij}$  – deslocamentos nodais ou de interface

$\bar{\mathbf{q}}$  – vetor de coordenadas generalizadas

$\mathbf{q}$  – vetor de graus de liberdade nodais

$\mathbf{q}_I$  – vetor de deslocamentos nodais ou de interface

$Q$  – esforço cortante

$\hat{Q}$  – operador linear

$R(u)$  – quociente de Rayleigh

$R_\lambda(T)$  – operador resolvente

$s$  – dimensão do espaço de aproximação

$s_i^j$  - funções de aproximação local do espaço  $S_i$

$S$  – espaço de aproximação global

$S_i$  – espaços de aproximação local

$S_j$  – modos estáticos de interface

$\mathbf{S}$  – vetor de modos estáticos de interface

$t$  – tempo

$\mathbf{T}$  – matriz de transformação de coordenadas

$T$  – operador linear

$T^X$  - operador adjunto

$T^*$  - operador Hilbert-adjunto

$T(M)$  – imagem do operador  $T$  sobre o subconjunto  $M$

$[T(M)]$  – fechamento de  $T(M)$

$T(t)$  – parcela temporal do deslocamento

$T_f$  – tempo final

$T_\lambda$  – operador linear

$\mathbf{u}$  – vetor de deslocamentos

$u^r$  – autovetor exato de ordem  $r$

$u(x), u_r(x)$  – parcela espacial (modo natural) do deslocamento axial



$\bar{u}(x, t)$  – deslocamento axial (longitudinal)

$u_h$  – campo de deslocamentos transversais aproximado

$u_h^s$  – autovetor aproximado de ordem  $s$

$u_i$  – graus de liberdade nodais (deslocamentos axiais)

$u_I$  – campo de deslocamentos de interface

$u_{ENRIQ}^e$  - campo de deslocamentos elementar enriquecido

$u_{MA}$  – campo de deslocamentos dos modos admissíveis

$u_{MC}$  – campo de deslocamentos do MC

$u_{MEF}$  – campo de deslocamentos do MEF

$u_{MEF}^e$  - campo de deslocamentos elementar do MEF

$u_{MMA}$  – campo de deslocamentos do MMA

$u_{TC}$  – campo de deslocamentos analítico

$\mathbf{U}$  – vetor de coordenadas no sistema local

$\mathbf{U}$  – espaço linear

$\bar{\mathbf{U}}$  – vetor de coordenadas no sistema global

$v$  – função de projeção

$v(x)$ ,  $v_r(x)$  - parcela espacial (modo natural) do deslocamento transversal

$\bar{v}(x, t)$  - deslocamento transversal

$v_h$  – campo de deslocamentos transversais aproximado

$v_h$  – funções de projeção

$v_i$  – graus de liberdade nodais (deslocamentos transversais)

$V$  – espaço linear

$x$  – coordenada cartesiana no plano

$x$  – autovalor de  $T$

$x_i$  – abscissa do nó  $i$

$x_k$  – soluções de  $Ax = 0$

$X$  – espaço da solução analítica

$X$  – espaço normado

$X'$  - espaço dual de  $X$

$y$  – coordenada cartesiana no plano

$y$  – elemento do espaço  $Y$

$y_i$  – ordenada do nó  $i$

$Y$  – espaço normado

$Y'$  - espaço dual de  $Y$

$w$  – funções teste

$w_h$  – funções do espaço  $H^h$

$w_h$  – funções teste aproximadas

$w_j$  – funções admissíveis

$W$  – espaço de Sobolev

$Y_v$  - função de Bessel de segundo tipo e ordem  $v$

$z_1, z_2$  – variáveis auxiliares

$Z_i$  - amplitudes

$\mathbf{Z}$  – vetor de amplitudes

$\alpha$  - constante de coercividade

$\alpha$  - parâmetro de acoplamento espaço-tempo

$\alpha, \alpha_i, \alpha_r$  – constantes

$\alpha_v$  – relação entre propriedades da viga

$\beta_j, \beta_r$  – autovalor adimensional

$\beta_{dj}, \beta_{ej}$  – autovalor adimensional nos subdomínios  $(x_{i-1}, x_i)$  e  $(x_i, x_{i+1})$

$\chi_e$  – autovalor adimensional analítico

$\chi_h$  – autovalor adimensional aproximado

$\chi_r$  – autovalor adimensional relativo à frequência  $\omega_r$

$\delta_{ij}$  - delta de Dirac

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – constantes

$\Phi$  - vetor de funções de forma enriquecidas

$\overline{\mathbf{O}}$  - vetor de modos admissíveis

$\phi_j$  – funções de base globais

$\phi_{ij}$  – funções enriquecedoras relacionadas às rotações nodais do MEF

$\phi_v$  – relação entre propriedades da viga

$\gamma$  - constante

$\gamma_b, \gamma_{ij}, \gamma_{ijk}$  – funções enriquecedoras do MEFG

$\gamma_T$  – constante torcional

$\eta_i$  - funções partição da unidade

$\varphi$  - funções analíticas de viga

$\varphi_{ij}$  – funções enriquecedoras do MEFG

$\partial\Omega$  - contorno do domínio  $\Omega$

$\kappa, \kappa_r$  - autovalor, número de onda

$\lambda, \lambda_r$  – autovalor

$\lambda^r$  – autovalor exato de ordem  $r$

$\lambda_h$  – autovalor aproximado

$\lambda_h^s$  – autovalor aproximado de ordem  $s$

$\lambda_w$  – comprimento de onda

$\mu$  - taxa de convergência

$\nu$  - constante

$\theta(x)$  - parcela espacial (modo natural) do deslocamento angular

$\bar{\theta}(x, t)$  - deslocamento angular

$\theta_i$  – graus de liberdade nodais (rotações)

$\theta_p$  – ângulo de propagação de onda

$\theta_v$  – relação entre propriedades da viga

$\rho, \rho_l, \rho_2$  - densidade

$\rho_d, \rho_e$  - densidade nos subdomínios  $(x_{i-1}, x_i)$  e  $(x_i, x_{i+1})$

$\rho(T)$  – conjunto resolvente

$\sigma$  – constante

$\sigma(T)$  – espectro de  $T$

$\sigma_c(T)$  – espectro contínuo de  $T$

$\sigma_p(T)$  – espectro pontual ou discreto de  $T$

$\sigma_r(T)$  – espectro residual de  $T$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – tensões normais segundo os eixos coordenados

$\tau_i$  - funções com suporte  $\Omega_i$

$\omega, \omega_i, \omega_r$  - frequência natural

$\omega_{alvo,i}, \omega_{alvo,MEF}, \omega_{alvo,MEFG}$  - frequência natural alvo

$\omega_h$  - frequência natural aproximada

$\Omega$  - domínio

$\Omega_i$  - subdomínios

$\Omega_e$  - domínio do elemento mestre

$\xi$  - coordenada local

$\psi$  - funções de viga

$\psi_i^e$  - funções de forma locais

$\psi_i$  – modos admissíveis

$\psi_v$  – função que descreve a variação da seção da viga

$\Psi$  – matriz de modos admissíveis

$\nabla$  - gradiente

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>33</b>
1.1 OBJETIVO GERAL.....	36
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	36
1.3 JUSTIFICATIVA.....	36
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	36
<b>2 REVISÃO DA LITERATURA.....</b>	<b>38</b>
2.1 MÉTODOS ANALÍTICOS .....	38
2.2 MÉTODOS APROXIMADOS.....	44
2.2.1 Método de Rayleigh-Ritz .....	44
2.2.2 Método dos Elementos Finitos .....	46
2.2.3 Método dos Elementos Finitos Spline .....	48
2.2.4 Método dos Modos Admissíveis.....	49
2.2.5 Método Composto e Método do Modo Componente .....	52
2.2.6 Método dos Elementos Finitos $p$ -Fourier .....	56
2.2.7 Método dos Elementos Finitos Generalizados.....	58
<b>3 PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE DE ESTRUTURAS RETICULADAS .....</b>	<b>70</b>
3.1 ANÁLISE ABSTRATA DOS PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE.....	70
3.1.1 Conceitos da análise funcional.....	71
3.1.2 Propriedades dos autovalores e autovetores.....	77
3.1.3 Estimativas de erro no processo de aproximação dos problemas de autovalores e autovetores .....	79
3.2 BARRA RETA COM VIBRAÇÃO AXIAL .....	85
3.2.1 Solução analítica .....	86
3.2.2 Formulação variacional .....	90
3.2.3 Soluções aproximadas .....	94

3.2.3.1	Método dos elementos finitos .....	94
3.2.3.1.1	Elemento linear .....	95
3.2.3.1.2	Elemento cúbico.....	96
3.2.3.1.3	Refinamento $p$ hierárquico .....	97
3.2.3.2	Métodos enriquecidos .....	98
3.2.3.2.1	Método dos modos admissíveis.....	99
3.2.3.2.2	Método composto.....	99
3.3	EIXO RETO COM VIBRAÇÃO TORCIONAL .....	100
3.3.1	Solução analítica .....	101
3.3.2	Formulação variacional .....	102
3.3.3	Soluções aproximadas .....	103
3.4	VIGA DE EULER-BERNOULLI COM VIBRAÇÃO TRANSVERSAL .....	103
3.4.1	Solução analítica .....	104
3.4.2	Formulação variacional .....	108
3.4.3	Soluções aproximadas .....	112
3.4.3.1	Método dos elementos finitos .....	112
3.4.3.1.1	Refinamento $p$ hierárquico .....	113
3.4.3.2	Método dos elementos finitos spline .....	114
3.4.3.3	Métodos enriquecidos .....	115
3.4.3.3.1	Método dos modos admissíveis.....	116
3.4.3.3.2	Método composto.....	118
3.4.3.3.3	Método dos elementos finitos $p$ -Fourier.....	118
3.5	ESTRUTURAS RETICULADAS .....	119
3.5.1	Treliça plana .....	119
3.5.1.1	Soluções aproximadas .....	119
3.5.1.1.1	Método dos elementos finitos .....	121
3.5.1.1.2	Métodos enriquecidos .....	121
3.5.2	Pórtico plano.....	122
3.5.2.1	Soluções aproximadas .....	123

3.5.2.1.1	Método dos elementos finitos .....	124
3.5.2.1.2	Métodos enriquecidos .....	125
<b>4</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS APLICADO A</b>	
	<b>PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE .....</b>	<b>126</b>
4.1	BASES MATEMÁTICAS DO MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE .....	126
4.2	ELEMENTO GENERALIZADO DE BARRA RETA .....	131
4.2.1	Refinamento adaptativo.....	138
4.2.2	Refinamento $p$ adaptativo.....	140
4.3	ELEMENTO GENERALIZADO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI.....	141
4.3.1	Refinamento adaptativo.....	147
<b>5</b>	<b>VERIFICAÇÕES NUMÉRICAS E APLICAÇÕES DO MÉTODO DOS</b>	
	<b>ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS.....</b>	<b>155</b>
5.1	IMPLEMENTAÇÃO DO MEFG.....	156
5.2	VIBRAÇÃO LIVRE DE BARRAS RETAS.....	157
5.2.1	Barra uniforme fixa-livre .....	157
5.2.1.1	Refinamento $h$ .....	158
5.2.1.2	Refinamento $p$ .....	163
5.2.1.3	Refinamento adaptativo .....	168
5.2.1.3.1	Verificação da estabilidade e convergência do método .....	169
5.2.1.3.2	Verificação do desempenho do método .....	169
5.2.1.4	Refinamento $p$ Adaptativo .....	174
5.2.2	Barra uniforme fixa-fixa .....	178
5.2.3	Barra uniforme livre-livre .....	180
5.2.4	Barra uniforme fixa-livre com massa concentrada na extremidade.....	183
5.2.4.1	Solução analítica .....	183
5.2.4.2	Solução aproximada.....	184
5.2.5	Barra fixa-livre composta por dois materiais diferentes .....	186
5.2.5.1	Solução analítica .....	186
5.2.5.2	MEFG Adaptativo .....	188

5.2.6	Barras não uniformes .....	189
5.2.6.1	Barra fixa-fixa com variação senoidal de área .....	189
5.2.6.2	Barra fixa-fixa com variação polinomial de área .....	193
5.3	VIBRAÇÃO LIVRE DE EIXOS CIRCULARES RETOS .....	196
5.3.1	Eixo uniforme fixo-livre com massa concentrada .....	196
5.3.2	Eixo uniforme fixo-livre com mola torcional .....	198
5.4	VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI .....	199
5.4.1	Viga uniforme engastada-livre .....	200
5.4.1.1	Refinamento $h$ .....	201
5.4.1.2	Refinamento $p$ .....	204
5.4.1.3	Refinamento adaptativo .....	211
5.4.2	Viga uniforme simplesmente apoiada .....	215
5.4.2.1	Refinamento $p$ .....	216
5.4.2.2	Refinamento adaptativo .....	221
5.4.3	Viga uniforme engastada-livre com massa concentrada na extremidade .....	223
5.4.3.1	Solução analítica .....	223
5.4.3.2	Solução aproximada .....	224
5.4.4	Viga uniforme bi-engastada com rótula interna .....	226
5.4.4.1	Solução analítica .....	227
5.4.4.2	Solução aproximada .....	227
5.4.5	Viga engastada-rotulada composta por dois materiais diferentes .....	229
5.4.5.1	Solução analítica .....	230
5.4.5.2	MEFG Adaptativo .....	232
5.4.6	Viga contínua composta por dois materiais diferentes .....	234
5.4.7	Viga engastada-rotulada com variação polinomial de área e inércia .....	236
5.5	VIBRAÇÃO LIVRE DE ESTRUTURAS RETICULADAS .....	239
5.5.1	Treliças planas .....	240
5.5.1.1	Treliça composta por sete barras .....	240
5.5.1.2	Treliça composta por 15 barras .....	242



5.5.2 Pórticos planos .....	244
<b>6 CONCLUSÃO .....</b>	<b>249</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>255</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O uso eficiente e racional dos recursos naturais e das riquezas é uma necessidade mundial e tem conduzido os engenheiros a buscarem a otimização estrutural nos seus projetos. Neste sentido, novos materiais e novas técnicas de fabricação e construção têm surgido, e as estruturas civis e mecânicas tornam-se cada vez mais leves e esbeltas. Estas estruturas estão sujeitas a efeitos dinâmicos gerados por fenômenos naturais como ventos, marés e terremotos, e também provocados pelo tráfego de veículos e operação de equipamentos e motores, entre outros. Para o engenheiro responsável pelo projeto, fabricação e manutenção destas estruturas torna-se imprescindível conhecer o seu real comportamento dinâmico. Em alguns casos o conhecimento prévio deste comportamento pode ser determinante no dimensionamento da estrutura.

Por outro lado, os métodos não destrutivos de detecção de falhas estruturais baseados na resposta dinâmica também exigem a disponibilidade de métodos precisos de análise do comportamento dinâmico.

Somente os problemas de vibrações de estruturas com geometrias muito simples e com condições de contorno específicas têm solução analítica conhecida. Logo, na análise dinâmica de sistemas estruturais reais, em geral muito complexos, é necessária a utilização de métodos computacionais aproximados para solução do problema. Muitos pesquisadores têm se dedicado ao desenvolvimento de métodos eficientes para análise de vibrações em estruturas.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) (PETYT, 1990; BATHE, 1996), disponível através de diversos softwares comerciais, é largamente utilizado na análise dinâmica de estruturas. Na análise de vibrações livres, ou seja, na determinação de frequências e modos naturais de vibração, o MEF apresenta bons resultados para as primeiras frequências. Verifica-se entretanto a necessidade de um modelo com grande número de graus de liberdade quando se pretende obter

uma boa precisão nas frequências e modos de vibração mais elevados, gerando assim maiores custos computacionais. O refinamento  $p$  do MEF permite aumentar a precisão da solução aproximada sem a necessidade de refinamento da malha, porém exige a determinação de novas funções de forma de grau mais elevado a cada etapa. Além disso, o mau condicionamento de polinômios de ordem elevada é relatado por alguns autores, tais como Leung e Chan (1998), e Ribeiro (2001).

Como alternativa, nos últimos anos têm sido desenvolvidos novos métodos, aqui denominados de “métodos enriquecidos”, que consistem no enriquecimento das funções de forma do MEF convencional pela adição de funções não polinomiais relacionadas à solução da equação diferencial governante do problema. Dentre estes métodos destacam-se: o Método dos Modos Admissíveis (MMA) (ENGELS, 1992, GANESAN; ENGELS, 1992), o Método Composto (MC) (ZENG, 1998a, b e c) e o Método dos Elementos Finitos  $p$ -Fourier (MEF Fourier) (LEUNG; CHAN, 1998). Estes métodos permitem a imposição das condições de contorno de forma simples, utilizando os mesmos procedimentos do MEF, e têm se mostrado mais precisos e com menor custo computacional do que o refinamento  $h$  do MEF convencional na análise de vibrações livres de barras, vigas e placas.

Em 1996 foi desenvolvido o Método da Partição da Unidade (MPU) (MELENK; BABUSKA, 1996), como uma técnica otimizada de enriquecimento. Com base nas idéias do MPU surgiram diversos métodos, entre eles o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). No MPU, a base do subespaço de aproximações locais é constituída de funções, não necessariamente polinomiais, que refletem informações disponíveis a priori sobre a solução da equação diferencial governante. Esta técnica garante boa aproximação local e global. As principais vantagens do MPU são: possibilidade de enriquecimento do espaço de aproximação global com funções que refletem o comportamento local da solução da equação diferencial governante, funções de forma obtidas mais facilmente do que no refinamento  $p$  do MEF, construção de espaços de aproximação com a regularidade desejada e refinamentos locais facilmente implementados. Entretanto, o MPU

apresenta alguns desafios que compreendem: a escolha adequada do espaço de funções de aproximação local, a imposição das condições de contorno essenciais, uma vez que os graus de liberdade utilizados não correspondem diretamente aos graus de liberdade nodais do MEF, e a construção adequada do esquema de integração dos coeficientes das matrizes de rigidez e massa.

Recentemente, inúmeras pesquisas têm comprovado a eficiência do MEFG e outros métodos baseados no MPU em problemas tais como análise de trincas (XIAO; KARIHALOO, 2007) e plasticidade (GRACIE; VENTURA; BELYTSCHKO, 2007), entre outros. Portanto, justifica-se uma investigação apurada da aplicabilidade e eficiência do MEFG na análise dinâmica de estruturas.

A aplicação do Método da Partição da Unidade em problemas da dinâmica estrutural não é inédita, uma vez que, embora poucos, existem alguns trabalhos apresentando a aplicação desta técnica na vibração livre e forçada de placas (DE BEL; VILLON; BOUILLARD, 2005; HAZARD; BOUILLARD, 2007).

A contribuição principal deste trabalho está na escolha de espaços de aproximação local para análise de vibrações livres de estruturas reticuladas, que reúnem tanto as vantagens dos métodos enriquecidos quanto do MPU. Sendo assim, os espaços de aproximação propostos, além de incorporarem conhecimento prévio sobre a solução da equação diferencial governante, permitem a imposição das condições de contorno através dos procedimentos clássicos do MEF, sem a necessidade do uso de outras técnicas como o método das penalidades ou o método dos multiplicadores de Lagrange. Também é proposto um método iterativo adaptativo que permite refinar a solução para uma determinada frequência, com rápida convergência e precisão equivalente, em alguns casos até superior, ao refinamento  $p$  do MEF. Este método adaptativo ainda agrega a vantagem de permitir a construção de funções de forma dependentes das características mecânicas do elemento e que são mais facilmente obtidas que as funções de forma do refinamento  $p$  do MEF para estruturas reticuladas.

## 1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é investigar a aplicação do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) na análise de vibrações livres de estruturas reticuladas.

## 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para alcançar o objetivo geral proposto pretende-se:

Apresentar a formulação variacional dos problemas de vibração de barras, eixos e vigas de Euler-Bernoulli, e desenvolver os respectivos elementos generalizados de modo a aplicá-los também na análise de treliças e pórticos planos.

Propor e desenvolver uma técnica de refinamento  $p^1$  adaptativo do MEFG para determinação de frequências naturais de vibração.

Buscar, apresentar e desenvolver soluções analíticas para problemas de vibrações livres de barras, eixos e vigas.

## 1.3 JUSTIFICATIVA

Atualmente, a preocupação mundial está voltada para a otimização e racionalização do uso dos recursos naturais cada vez mais escassos. Uma aplicação ótima de recursos depende de análises de modelos os mais próximos possíveis dos sistemas físicos reais analisados. Para tanto, o desenvolvimento de métodos de análise mais precisos, rápidos e confiáveis é imprescindível.

## 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

A estrutura deste trabalho é a seguinte: no capítulo 2 é apresentada uma

---

<sup>1</sup> No presente trabalho, assim como nos trabalhos publicados por RIBEIRO (2001) e, CAMPION e JARVIS (1996), o refinamento  $p$  corresponde ao aumento de funções de forma na base aproximadora.

revisão da literatura sobre métodos de análise dinâmica analíticos e aproximados. O capítulo 3 contém as formulações variacionais e os principais métodos de solução analítica e aproximada dos problemas de vibração livre de estruturas reticuladas. No capítulo 4 apresentam-se as bases matemáticas do Método da Partição da Unidade e os elementos generalizados de barra e viga de Euler-Bernoulli. Também são apresentadas as propostas de refinamento e adaptatividade do método. No capítulo 5 são apresentadas as verificações numéricas e aplicações do método. O capítulo 6 apresenta as conclusões finais do trabalho e sugestões de continuidade.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

O homem tem se interessado por entender os fenômenos de vibração desde a antiguidade, quando foram inventados os primeiros instrumentos musicais. Segundo Dimarogonas (1996), o filósofo e matemático grego Pitágoras (582-507 a.C.) é considerado o primeiro a investigar os sons musicais em bases científicas.

No estudo das vibrações em estruturas podem-se destacar alguns nomes importantes. A vibração de vigas finas foi estudada pela primeira vez por Euler em 1744 e Daniel Bernoulli em 1751, cuja teoria passou a denominar-se teoria das vigas finas ou teoria de Euler-Bernoulli. Em 1802, o cientista alemão Chladni observou a vibração de placas e seus modos de vibração. Sophie Germain foi premiada em 1815, pela Academia Francesa, por apresentar a teoria de vibração de placas. Mais tarde foi descoberto que a equação diferencial apresentada por ela estava correta, mas as condições de contorno eram errôneas. As condições de contorno corretas para o problema de vibração de placas foram obtidas por Kirchhoff em 1850.

Muitos outros cientistas e estudiosos poderiam ser citados neste período, com destaque para Lord Baron Rayleigh, que em 1877 publicou seu livro sobre a teoria do som, ainda hoje considerado um clássico na teoria da vibração. Rayleigh desenvolveu um método, conhecido como Método de Rayleigh, para obtenção da frequência natural de um sistema conservativo. (DIMAROGONAS, 1996)

Os métodos utilizados para solução dos problemas de vibração podem ser subdivididos em dois grandes grupos: métodos analíticos e métodos aproximados.

### 2.1 MÉTODOS ANALÍTICOS

Os métodos analíticos de solução de problemas de vibração fornecem as soluções analíticas das equações do movimento (equações de equilíbrio dinâmico). Porém, estas soluções são possíveis apenas para geometrias e condições de

contorno muito particulares. Já os problemas reais de engenharia apresentam geometrias e condições de contorno muito mais complexas. Entretanto, as soluções analíticas são muito importantes pois fornecem subsídios para um conhecimento mais aprofundado do comportamento físico do fenômeno estudado, além de permitir a verificação da eficiência e precisão dos métodos numéricos aproximados. Sendo assim, vários pesquisadores têm se dedicado à obtenção de soluções analíticas de diversos problemas da dinâmica.

Os trabalhos de Clough e Penzien (1975), Meirovitch (1975), Craig (1981), Chopra (1995), Rao (1995) e Inman (1996) apresentam os conceitos fundamentais da análise de vibrações de sistemas contínuos e as soluções analíticas para vibração de cabos, vibração axial e torcional de barras uniformes, vibração lateral de vigas uniformes, incluindo ou não os efeitos de força axial, deformação cisalhante e inércia rotacional, e vibração de membranas e placas.

O estudo da vibração axial de barras de seção transversal não uniforme é importante para a compreensão do comportamento dinâmico de estruturas que utilizam materiais compostos e de fundações, e da propagação de ondas em tubos de seção variável, entre outros. Alguns dos mais importantes trabalhos dedicados à investigação da solução analítica destes problemas são destacados a seguir.

Abrate (1995) apresenta uma família de funções polinomiais de 2º grau para descrever variações da seção transversal da barra e que permitem, depois de adequada mudança de variáveis, a transformação da equação diferencial governante do problema em uma clássica equação da onda, cuja solução é bastante conhecida.

Kumar e Sujith (1997) apresentam soluções analíticas para vibração axial livre de barras com seção transversal tendo variações polinomial e senoidal da área ( $A$ ), respectivamente nas formas  $A = (ax + b)^n$  e  $A = A_0 \sin^2(ax + b)$ , sendo  $A_0$ ,  $a$ ,  $b$  e  $n$  parâmetros que definem a função de variação ao longo do eixo  $x$ . Estes autores utilizam mudanças apropriadas de variáveis para reduzir a equação do movimento à equações diferenciais com solução analítica conhecida. As soluções analíticas



apresentadas por Kumar e Sujith (1997) aparecem na forma de funções trigonométricas e funções de Bessel.

Kumar e Sujith (1997) verificaram que nos casos de barras de seção não uniforme as frequências mais baixas são mais afetadas pela variação da seção, enquanto as frequências mais altas se aproximam da solução de barra com seção uniforme equivalente. As barras com seção variável polinomial apresentam também modos de vibração com amplitudes decrescentes ao longo do comprimento do eixo da barra. Os autores sugerem que a utilização de funções de Bessel como funções de forma nas soluções aproximadas para a vibração livre de barras de seção não uniforme pode gerar melhores resultados que os obtidos com o uso de funções trigonométricas e polinomiais.

Em muitos problemas práticos, como na análise de vibrações axiais de edifícios altos, o problema pode ser entendido como a vibração livre de uma barra composta por vários trechos com diferentes distribuições de rigidez e massa. Buscando a solução de tais problemas, Li (2000a e 2000b) apresenta métodos analíticos para determinação das frequências e modos naturais de vibração de barras não uniformes compostas por múltiplos trechos. A função que descreve a distribuição de massa da barra é arbitrária e a distribuição da rigidez axial é expressa por um funcional relacionado à distribuição de massa. Para relações funcionais do tipo potência e exponencial, a equação diferencial governante para uma barra constituída de um único trecho é reduzida a uma equação diferencial com solução analítica conhecida. Fórmulas de recorrência apropriadas (LI, 2000a) ou o Método da Matriz de Transferência (MMT) (LI, 2000b) são então empregados para obter soluções analíticas de barras de múltiplas seções não uniformes com as distribuições de massa e rigidez analisadas. Li, Li e Liu (2000) utilizaram a técnica do MMT para apresentar a solução analítica do problema de vibração axial de um sistema composto por duas barras não uniformes com massas concentradas e acopladas por molas translacionais.

Recentemente, Raj e Sujith (2005) apresentaram um método geral para

determinação de uma família de funções para descrever as variações de seção transversal que conduzem a soluções analíticas conhecidas para a vibração axial de barras não uniformes.

Como a vibração torcional de eixos estacionários é matematicamente idêntica ao problema de vibração axial de barras, as soluções analíticas obtidas para estes problemas podem ser compartilhadas, com as devidas adaptações. Soluções analíticas para vibração torcional livre de eixos uniformes, com condições de contorno clássicas e não clássicas, são encontradas no trabalho de Gorman (1975). Recentemente, Chen (2006) utilizou o Método da Montagem Numérica para determinar as frequências e modos naturais analíticos de eixos circulares uniformes carregando múltiplos elementos concentrados (massas com inércia rotacional ou molas torcionais).

Quanto às vigas uniformes, existem quatro diferentes teorias que descrevem a vibração transversal destas estruturas, que são: Euler-Bernoulli, Rayleigh, Cisalhamento e Timoshenko. As equações governantes, as expressões para as condições de contorno clássicas, as equações características e suas raízes, para estas quatro teorias aplicadas a vigas uniformes são apresentadas por Han, Benaroya e Wei (1999). Um resumo das principais características desta teorias é apresentado na tabela 2.1.

TABELA 2.1 – TEORIAS PARA VIGAS

Modelos	Momento fletor	Deslocamento lateral	Deformação por cisalhamento	Inércia rotacional
Euler-Bernoulli	sim	sim	não	não
Rayleigh	sim	sim	não	sim
Cisalhamento	sim	sim	sim	não
Timoshenko	sim	sim	sim	sim

FONTE: HAN, BENAROYA e WEI (1999)

A teoria de Euler-Bernoulli, muitas vezes denominada de teoria clássica de vigas, teoria de vigas de Euler ou teoria de vigas de Bernoulli, é a mais comumente empregada pois é simples e fornece aproximações razoáveis para muitos problemas da engenharia. Esta é a teoria de vigas utilizada neste trabalho. Sabe-se entretanto

que esta teoria tende a superestimar ligeiramente as frequências naturais, especialmente para os modos de ordem mais elevada, e seus resultados são melhores para vigas esbeltas. (HAN; BENAROYA; WEI, 1999)

A teoria de vigas de Euler-Bernoulli remonta ao século XVIII. Jacob Bernoulli (1654-1705) descobriu que a curvatura de uma viga elástica é proporcional ao momento fletor. Posteriormente, seu sobrinho Daniel Bernoulli (1700-1782) formulou a equação do movimento de uma viga em vibração. Em sua investigação sobre a forma de vigas elásticas submetidas a diversas combinações de carga, Leonhard Euler (1707-1783) aceitou a teoria de Jacob Bernoulli.

O problema de vibração livre de vigas uniformes de Euler-Bernoulli tem sido abordado por diversos pesquisadores, entre eles: Chang e Craig (1969), Gorman (1975), Clough e Penzien (1975), Meirovitch (1975) e Craig (1981).

A forma clássica da solução espacial do problema de vibração livre de vigas de Euler-Bernoulli apresenta termos trigonométricos e hiperbólicos. Verifica-se entretanto que as equações características obtidas a partir desta solução podem apresentar instabilidade numérica na determinação de altos modos de vibração, devido às magnitudes excessivas dos termos hiperbólicos. Gartner e Olgac (1982) apresentam uma forma alternativa para a solução espacial da equação diferencial governante deste problema, que limita a magnitude de todos os termos da solução ao intervalo aproximado de  $\pm 1$ , reduzindo os erros no cálculo das frequências e modos naturais de vibração. O trabalho de Gartner e Olgac (1982) apresenta as equações características, os autovalores associados às 10 primeiras frequências naturais e os coeficientes da solução espacial para todas as combinações de condições de contorno clássicas de vigas uniformes.

Diversos pesquisadores têm se dedicado ao estudo das vigas não uniformes, uma vez que estas são frequentemente utilizadas em estruturas civis e navais, e em equipamentos.

Abrate (1995) apresenta uma técnica de redução da equação diferencial governante de viga não uniforme a uma equação de viga uniforme equivalente, para

o caso da vibração transversal de vigas de Euler-Bernoulli com variação polinomial de quarto grau para área e inércia da seção transversal. De Rosa e Auciello (1996) solucionaram, em termos de funções de Bessel, a equação do movimento vibratório de vigas de Euler-Bernoulli com variação linear de seção transversal, com extremidades axial e rotacionalmente flexíveis. Já Auciello e Ercolano (1997) apresentaram a solução analítica, utilizando funções de Bessel, para viga de Euler-Bernoulli com apoios genéricos e com seção transversal retangular, sujeita à variação linear da altura e da largura ao longo do comprimento. O resultado obtido foi utilizado na análise de vigas com seção transversal descontínua, sendo uma parte constante e a outra parte com variação linear de seção.

A análise das frequências naturais de vigas de Euler-Bernoulli com massas concentradas e condições de contorno clássicas foi realizada por Low (1997 e 1998). As soluções analíticas constituídas por funções transcendentais foram comparadas com resultados obtidos pelo Método de Rayleigh (LOW, 1998) e com resultados experimentais (LOW, 1997 e 1998). Recentemente, Maiz et al. (2007) apresentaram uma técnica para determinação analítica de frequências naturais de vibração de uma viga de Euler-Bernoulli com condições de contorno gerais, carregando um número finito de massas em posições arbitrárias e levando em conta suas inércias rotacionais. Como casos particulares deste problema, foram analisadas também vigas contínuas.

Muitos outros trabalhos poderiam ser ainda citados. Aqueles aqui citados têm por objetivo mostrar um panorama geral das pesquisas realizadas sobre a solução analítica de problemas de vibração de barras e vigas, e salientar que a pesquisa nesta área continua importante na atualidade. Embora a grande maioria dos problemas de engenharia não tenha solução viável pelo uso das técnicas analíticas, estas pesquisas são uma vasta fonte de subsídios para teste e verificação de novos métodos aproximados.

## 2.2 MÉTODOS APROXIMADOS

Diversos métodos aproximados têm sido desenvolvidos para a análise numérica de vibrações. Entre eles pode-se destacar: o Método de Rayleigh-Ritz (CLOUGH; PENZIEN, 1975), o Método dos Elementos Finitos (MEF) (PETYT, 1990; BATHE, 1996), o Método das Tiras Finitas (CHEUNG; AU; ZHENG, 2000; FRIEDRICH, 2000), o Método dos Elementos de Contorno (BREBBIA; NARDINI, 1983; TANAKA; MATSUMOTO; SHIOZAKI, 1998) e os Métodos Estocásticos (VANMARCKE; GRIGORIU, 1983; LEI; QIU, 1998; LI; FANG; LIU, 1999). Porém, o Método dos Elementos Finitos (MEF) continua sendo o mais empregado na solução de problemas de vibrações em engenharia.

Nesta revisão da literatura dedica-se atenção ao clássico método de Rayleigh-Ritz, ao Método dos Elementos Finitos (MEF) e aos métodos enriquecidos baseados no MEF, além do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), que consiste no principal foco deste trabalho.

### 2.2.1 Método de Rayleigh-Ritz

Segundo Clough e Penzien (1975), o Método de Rayleigh-Ritz é uma extensão do Método de Rayleigh para problemas de vibrações livres e tem como hipótese básica que o vetor de deslocamentos ( $\mathbf{u}$ ) da estrutura pode ser expresso em termos de um conjunto de modos admissíveis  $\Psi$  de amplitude  $\mathbf{Z}$  como segue:

$$\mathbf{u} = \psi_1 Z_1 + \psi_2 Z_2 + \psi_3 Z_3 + \dots = \Psi \mathbf{Z} \quad (2.1)$$

Para obter os melhores resultados com o menor número de coordenadas, cada uma das funções admissíveis  $\psi_i$  deveria ser tomada como uma aproximação do modo de vibração analítico correspondente. Porém, muitos outros esquemas têm sido

propostos para escolha das funções admissíveis.

No Método de Rayleigh-Ritz, as funções que compõem a solução analítica do problema de vibração livre de vigas uniformes de Euler-Bernoulli são amplamente utilizadas como funções admissíveis na solução aproximada de problemas estruturais complexos. Logo, fórmulas de integração para produtos destas funções admissíveis por uma função arbitrária integrável são essenciais no Método de Rayleigh-Ritz. Para este fim, Leung (1988) utiliza a forma alternativa de solução do problema de vibração livre de vigas uniformes proposto por Gartner e Olgac (1982) para estabelecer fórmulas de integração do tipo

$$\int f \varphi \psi \, d\xi \quad (2.2)$$

para o produto de funções  $\varphi$  e  $\psi$  satisfazendo a equação governante do problema de vibração de vigas uniformes, ou seja

$$\frac{d^4 \varphi}{d\xi^4} = \beta^4 \varphi \quad , \quad \text{e} \quad (2.3)$$

$$\frac{d^4 \psi}{d\xi^4} = \beta^4 \psi \quad , \quad (2.4)$$

com uma função arbitrária integrável  $f$ .

No trabalho de Leung (1988), o Método de Rayleigh-Ritz foi aplicado na análise de vibração livre de uma viga não uniforme com variação polinomial cúbica de rigidez e variação linear de massa, e foram obtidos os quatro primeiros autovalores associados às frequências naturais, para diferentes parâmetros de variação da rigidez e da massa. Também foi analisada a vibração livre de um sistema de placas utilizando as funções de viga como funções admissíveis. Os resultados do método de Rayleigh-Ritz proposto, com 66 graus de liberdade, foram comparados com os resultados do Método dos Elementos Finitos com 728 graus de liberdade. As 16 primeiras frequências naturais obtidas pelo método proposto foram

bastante precisas, apresentando valores próximos porém inferiores aos obtidos pelo MEF com número muito maior de graus de liberdade. Leung (1990) também discute em detalhes o método para gerar as fórmulas de integração envolvendo produtos de funções admissíveis obtidos a partir das soluções analíticas para vigas uniformes, e corrige os coeficientes de solução para vigas com uma extremidade articulada fixa e outra livre, erroneamente indicados por Gartner e Olgac (1982).

### 2.2.2 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional, também considerado como uma generalização do Método de Rayleigh-Ritz (PETYT, 1990), é um método bem conhecido e poderoso na solução de problemas com qualquer geometria e grau de complexidade. Porém, para atingir boa precisão em frequências altas de vibração o MEF geralmente exige um grande custo computacional. A análise de vibrações em estruturas através do MEF é apresentada e discutida por Petyt (1990).

O MEF pode ter sua precisão aumentada através dos refinamentos:  $h$ ,  $p$ ,  $hp$  e adaptativos. A técnica mais simples, denominada de refinamento  $h$ , corresponde ao aumento do número de elementos que compõem a malha.

Trabalhos recentes de Ribeiro (2001) e, Campion e Jarvis (1996) definem o refinamento  $p$  como sendo o aumento do grau e/ou do número das funções de forma no elemento sem alterar a malha. No caso de funções de forma polinomiais, como as utilizadas no MEF convencional, o refinamento  $p$  corresponde ao aumento do grau do polinômio interpolador da solução. Vários pesquisadores como Ganesan e Engels (1992), Zeng (1998a, b e c) e Ribeiro (2001) têm utilizado funções de forma não polinomiais ao proporem formas enriquecidas do Método dos Elementos Finitos.

O refinamento  $hp$ , por sua vez, consiste na combinação do refinamento da malha (refino  $h$ ) simultaneamente com a variação na ordem do polinômio aproximador (refino  $p$ ). Todas estas técnicas podem ser adaptativas desde que a malha de elementos, as funções de forma, ou ambas, dependendo do tipo de refinamento, se ajustem durante o processo de análise com o objetivo de melhorar a

solução.

Segundo Ribeiro (2001), Zienkiewicz, Gago e Kelly (1982) e, Carey e Oden (1984a), em um refinamento  $p$ , se o conjunto de funções de forma de uma aproximação de ordem  $p$  constitui um subconjunto do conjunto de funções de forma de uma aproximação de ordem  $p+1$ , este refinamento é denominado hierárquico. As funções de forma hierárquicas foram introduzidas por Zienkiewicz, Irons, Scott e Campbell por volta do ano de 1971, conforme indica o trabalho de Zienkiewicz, Gago e Kelly (1982). Campion e Jarvis (1996) destacam como principais vantagens dos métodos hierárquicos: a retenção dos coeficientes da matriz de rigidez quando a ordem da interpolação aumenta e a obtenção de altas taxas de convergência sem necessidade de refinar a malha, além de resultar em melhora do condicionamento das equações envolvidas.

A utilização de refinamentos hierárquicos na solução de problemas de vibração em estruturas permite que as matrizes de massa e rigidez já calculadas sejam mantidas e somente os termos destas matrizes relativos às novas funções de forma necessitem ser calculados. Esta propriedade reduz o esforço computacional necessário para montagem das matrizes a cada etapa do refinamento. Entretanto, Leung e Chan (1998), e Ribeiro (2001) destacam que polinômios de alta ordem são mal condicionados, levando alguns pesquisadores a utilizarem funções trigonométricas na interpolação dos deslocamentos em problemas de vibrações em estruturas.

Segundo Solin, Segeth e Dolezel (2004), os melhores resultados do MEF podem ser atingidos usando refinamentos *hp* adaptativos orientados a uma meta. Estes autores apresentam os princípios básicos do MEF de alta ordem e técnicas de discretização e refinamento adaptativos.

O número de trabalhos publicados em que o MEF é utilizado na análise de vibrações é bastante grande. Este fato pode ser comprovado, por exemplo, ao observarem-se as revisões bibliográficas do Método dos Elementos Finitos aplicado à análise de vibrações de vigas, placas, cascas e outras estruturas entre os anos de



1994 e 1998 apresentadas por Mackerle (1999 e 2000). Recentemente, um elemento Lagrangiano de 4 nós para análise de vibrações livres de vigas curvas através do MEF foi apresentado por Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2008).

Ao longo dos últimos anos têm surgido novos métodos baseados no enriquecimento das funções de forma do MEF, como o Método dos Modos Admissíveis (MMA) (ENGELS, 1992, GANESAN; ENGELS, 1992), o Método Composto (MC) (ZENG, 1998a, b e c) e o Método dos Elementos Finitos  $p$ -Fourier (MEF Fourier) (LEUNG; CHAN, 1998), além do Método dos Elementos Finitos Spline (MEFS) (LEUNG; AU, 1990). As idéias fundamentais destes métodos e os principais resultados obtidos estão descritos nos próximos tópicos.

### 2.2.3 Método dos Elementos Finitos Spline

O Método dos Elementos Finitos Spline (MEFS), proposto por Leung e Au (1990), consiste na utilização de funções  $B_3$ -spline como funções de forma do campo de deslocamentos, na análise de vibrações livres de vigas e placas. As funções  $B_3$ -spline são computacionalmente eficientes e flexíveis na modelagem de diferentes condições de contorno. Os parâmetros destas funções sobre o contorno, ou fora dele, são totalmente eliminados através de transformação apropriada para garantir que a imposição das condições de contorno siga o mesmo procedimento do MEF convencional.

O MEFS foi aplicado na análise de vibração livre de uma viga contínua com mudanças abruptas de seção e de placas com diferentes condições de contorno.

As quatro primeiras frequências naturais da viga foram determinadas utilizando o MEFS com 13 graus de liberdade efetivos e o MEF convencional com 22 graus de liberdade. Apesar de tratar-se de discretizações pobres, os resultados obtidos por ambos os métodos apresentaram a mesma precisão, quando comparados à solução analítica. Observando o número de graus de liberdade empregados em cada análise, verifica-se a maior eficiência do MEFS.

Na análise da vibração livre de placas retangulares com várias condições de

contorno homogêneas, Leung e Au (1990) observaram que apenas 40 a 60% dos graus de liberdade utilizados na análise pelo Método das Tiras Finitas Spline eram necessários ao utilizar o MEFS, para obter resultados com precisão similar.

#### 2.2.4 Método dos Modos Admissíveis

O Método dos Modos Admissíveis (MMA) baseia-se na idéia apresentada por Craig (1981) de que o campo de deslocamentos pode ser escrito como a combinação linear de funções representando modos admissíveis de vibração. O MMA para análise de vibrações livres de barras, vigas e pórticos proposto por Engels (1992) e, Ganesan e Engels (1992) consiste em descrever o campo de deslocamentos de um elemento genérico por:

$$u_{MMA}(\xi) = u_I(\xi) + u_{MA}(\xi) \quad (2.5)$$

onde  $u_I$  e  $u_{MA}$  são os campos de deslocamentos de interface e dos modos admissíveis, respectivamente. A interface é definida como o conjunto de pontos, curvas e superfícies que a estrutura tem em comum com a sua vizinhança. Os modos admissíveis devem ser linearmente independentes, suficientemente diferenciáveis e satisfazer as condições de contorno geométricas.

O primeiro termo da equação (2.5) corresponde a um deslocamento estático devido ao deslocamento da interface, e pode ser determinado por um sistema de coordenadas nodais utilizando o vetor de modos estáticos de interface  $S$ , o vetor de deslocamentos nodais ou de interface  $q_I$  e a coordenada local do elemento  $\xi$ , como na equação:

$$u_I(\xi) = S^T(\xi) q_I \quad (2.6)$$

Os modos estáticos de interface devem ser escolhidos de tal forma a capturar com precisão a deformação estática causada pelos deslocamentos físicos dados pelo

vetor de deslocamentos da interface. O modo estático  $S_j$  correspondente ao deslocamento nodal  $q_{Ij}$  é definido como a deformação estática do elemento para  $q_{Ij} = 1$  e  $q_{Ii} = 0$  para todo  $i \neq j$ . Verifica-se que as funções de forma do MEF convencional são idênticas aos modos estáticos de interface, ou seja, o vetor de modos estáticos corresponde ao vetor de funções de forma do MEF e os deslocamentos de interface aos deslocamentos nodais do elemento.

O segundo termo do campo de deslocamentos  $u_{MA}$  representa o restante do deslocamento total  $u_{MMA}$  medido em relação a  $u_I$  por um observador absoluto. Logo, o campo de deslocamentos dos modos admissíveis  $u_{MA}$  se anula na interface do elemento e pode ser expresso como uma combinação linear de modos admissíveis restritos na interface, através da equação:

$$u_{MA}(\xi) = \bar{\mathbf{O}}^T(\xi) \bar{\mathbf{q}} \quad (2.7)$$

onde  $\bar{\mathbf{O}}$  é o vetor de modos admissíveis e  $\bar{\mathbf{q}}$  é o vetor de coeficientes ou coordenadas generalizadas.

Existem muitos conjuntos de modos admissíveis que podem ser utilizados, entre eles destacam-se os modos de vibração normais restritos, que são obtidos da solução analítica da vibração livre do elemento com todos os deslocamentos de interface restritos. De fato, a única restrição para os modos admissíveis é que sejam formados por funções que se anulem na interface do elemento.

Substituindo as equações (2.6) e (2.7) em (2.5) obtém-se:

$$u_{MMA}(\xi) = \mathbf{S}^T(\xi) \mathbf{q}_I + \bar{\mathbf{O}}^T(\xi) \bar{\mathbf{q}} \quad (2.8)$$

Portanto, o campo de deslocamentos passa a ser escrito como uma combinação linear de dois conjuntos de modos admissíveis: modos estáticos e modos admissíveis restritos na interface. Segundo Engels (1992) e, Ganesan e Engels (1992), esta representação do campo de deslocamentos é completa no sentido de que qualquer grau de precisão é teoricamente possível desde que se acrescentem

diferentes modos admissíveis restritos na interface em quantidade suficiente.

O MMA apresenta três importantes vantagens: possui alta taxa de convergência, em princípio nenhuma subdivisão dos elementos base é necessária e o modelo gerado é hierárquico.

Engels (1992) apresentou os elementos do MMA para barras e vigas de Euler-Bernoulli utilizando modos de vibração normais analíticos como modos admissíveis. Também foram discutidas as formas de obter elementos para barras em torção e pórticos planos e espaciais utilizando o MMA. O método foi aplicado na análise de vibração livre de uma barra livre-livre, uma viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada e um pórtico plano. As tabelas 2.2 e 2.3 apresentam o número de frequências com uma precisão de  $p\%$  ou melhor em relação às soluções analíticas, em função do número de graus de liberdade ( $ngl$ ), com a utilização do MMA e do MEF convencional implementado no software MSC/NASTRAN para análise da barra e da viga. Os resultados obtidos mostram que as frequências naturais obtidas pelo MMA são mais precisas que as obtidas pelo refinamento  $h$  do MEF convencional com um número maior de graus de liberdade.

TABELA 2.2 – NÚMERO DE FREQUÊNCIAS COM UMA PRECISÃO  $p\%$  OU MELHOR – BARRA LIVRE-LIVRE

$ngl$	6		16		26		36		51	
$p\%$	MMA	MEF	MMA	MEF	MMA	MEF	MMA	MEF	MMA	MEF
1	3	1	12	3	22	4	34	6	49	8
5	4	2	14	6	24	9	34	13	49	18
10	4	3	14	8	24	13	34	18	49	26

FONTE: ENGELS (1992)

TABELA 2.3 – NÚMERO DE FREQUÊNCIAS COM UMA PRECISÃO  $p\%$  OU MELHOR – VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

$ngl$	4		10		16		20		26	
$p\%$	MMA	MEF	MMA	MEF	MMA	MEF	MMA	MEF	MMA	MEF
1	2	1	8	3	14	5	18	6	24	8
5	2	1	8	4	14	7	18	9	24	12
10	2	1	8	4	14	7	18	9	24	12

FONTE: ENGELS (1992)

Ganesan e Engels (1992) desenvolveram elementos de viga de Euler-Bernoulli para o MMA utilizando dois diferentes tipos de modos admissíveis restritos

na interface: modos de vibração livre de viga bi-engastada (modos normais) e funções trigonométricas. A figura 2.1 mostra o desempenho destas duas formulações do MMA e do MEF convencional na análise de uma viga simplesmente apoiada.

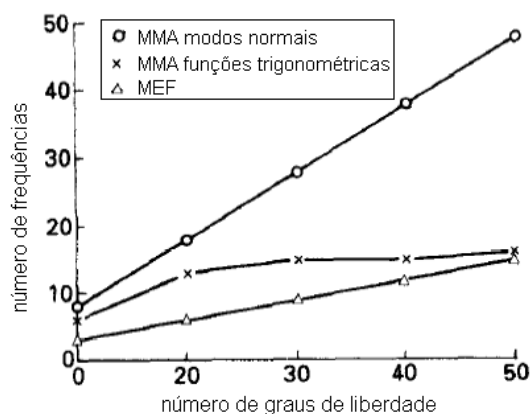


FIGURA 2.1 – NÚMERO DE FREQUÊNCIAS CONVERGINDO COM PRECISÃO MÍNIMA DE 1% - VIGA SIMPLEMENTE APOIADA  
FONTE: GANESAN E ENGELS (1992)

## 2.2.5 Método Composto e Método do Modo Componente

Outro método para análise de vibrações, denominado Método Composto (MC) (“Composite Element Method”), foi apresentado por Zeng (1998a, b e c). Este método é basicamente uma combinação da versatilidade do MEF com a alta precisão das soluções analíticas. O MC é obtido utilizando o elemento convencional do MEF, com o conjunto de funções de forma enriquecido pela adição de funções não polinomiais relacionadas às soluções analíticas do problema.

Os novos graus de liberdade relacionados às funções enriquecedoras não têm significado físico direto e foram denominados graus de liberdade  $c$  por Zeng (1998b). O MC pode ser refinado através do aumento de elementos da malha (refinamento  $h$ ) ou através do aumento da base de funções de forma. O refinamento hierárquico obtido pelo aumento do número das funções analíticas na solução aproximada foi denominado refinamento  $c$  por Zeng (1998a e b).

Zeng (1998a e b) desenvolveu elementos de barra, viga de Euler-Bernoulli e

pórtico utilizando esta técnica para análise de vibrações livres. Shi e Zeng (2000) desenvolveram o elemento composto para vibração de placa fina elástica. Machado et al. (2002) apresentam elementos compostos para vigas de Euler-Bernoulli, vigas de Timoshenko e placas de Mindlin.

Além do MC, outro método, denominado Método do Modo Componente, apresentado por Weaver Junior e Loh (1985), utiliza soluções analíticas na função de interpolação de deslocamentos. O Método do Modo Componente utiliza, na função de interpolação de deslocamentos laterais do elemento, as soluções analíticas do problema de vibração livre de uma viga bi-rotulada, com o objetivo de incluir o efeito dos modos locais de vibração na análise dinâmica de treliças.

No MC, o campo de deslocamentos é descrito pela combinação de funções de forma polinomiais de elementos finitos, baseados nos valores nodais, e funções de forma obtidas das soluções analíticas. As funções analíticas utilizadas são obtidas através da solução da equação diferencial do movimento do problema, no domínio do elemento, com condições de contorno compatíveis, a fim de manter os valores dos deslocamentos nodais sendo representados apenas pelos graus de liberdade do MEF. Logo, o campo de deslocamentos é descrito por:

$$u_{MC}(\xi) = u_{MEF}(\xi) + u_{TC}(\xi) \quad (2.9)$$

onde  $u_{MEF}$  e  $u_{TC}$  são os campos de deslocamentos do MEF e analítico, respectivamente.

O primeiro termo do campo de deslocamentos pode ser determinado por um sistema de coordenadas nodais do MEF utilizando o vetor de funções de forma  $\mathbf{N}$ , o vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$  (ou graus de liberdade nodais) e a coordenada local do elemento  $\xi$ , como na equação:

$$u_{MEF}(\xi) = \mathbf{N}^T(\xi) \mathbf{u} \quad (2.10)$$

O segundo termo do campo de deslocamentos é dado por coeficientes que multiplicam as funções analíticas enriquecedoras, através da equação:

$$u_{TC}(\xi) = \mathbf{\Theta}^T(\xi) \mathbf{c} \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{\Theta}$  é o vetor de funções analíticas e  $\mathbf{c}$  é o vetor de coeficientes (graus de liberdade  $c$  ou coordenadas  $c$ ).

Substituindo as equações (2.10) e (2.11) em (2.9) obtém-se:

$$u_{MC}(\xi) = \mathbf{N}^T(\xi) \mathbf{u} + \mathbf{\Theta}^T(\xi) \mathbf{c} \quad (2.12)$$

Observa-se que o MC corresponde ao caso particular do MMA proposto por Engels (1992) e, Ganesan e Engels (1992) em que se utilizam os modos de vibração natural analíticos do elemento, com deslocamentos nodais restritos, como modos admissíveis.

O enriquecimento proposto pelo MC produz modelos hierárquicos e melhores resultados que aqueles obtidos pelo refinamento  $h$  do MEF convencional na análise de vibrações livres de barras e vigas de Euler-Bernoulli (ARNDT, MACHADO e HECKE, 2002a e 2003).

Arndt, Machado e Hecke (2002b), ao analisarem os casos de vibração livre de uma barra uniforme fixa-livre e de uma viga uniforme engastada-livre, verificaram que tanto o refinamento  $c$  do MC quanto o refinamento  $p$  do MEF apresentam grande precisão na determinação dos primeiros autovalores, mas os erros crescem rapidamente na determinação dos últimos. Este efeito foi mais marcante no refinamento  $p$ . Os autovalores de ordem mais elevada obtidos nesta análise pelo refinamento  $c$  foram mais precisos que os obtidos pelo refinamento  $p$  do MEF, com o mesmo número de graus de liberdade. Além disso, o número de graus de liberdade necessários para o refinamento  $p$  atingir maior precisão que o refinamento  $c$  do MC mostrou-se crescente com a ordem do autovalor.

Arndt, Machado e Hecke (2005) compararam os refinamentos  $p$  hierárquico

do MEF obtido a partir do elemento cúbico de Hermite, o refinamento  $c$  do MC e o refinamento trigonométrico proposto por Ganesan e Engels (1992) na análise de vibração livre de uma viga uniforme bi-apoiada. Os resultados obtidos mostraram que o refinamento  $p$  hierárquico convencional e o MC possuem taxas de convergência superiores aos refinamentos trigonométricos e  $h$  (elemento cúbico). Mesmo o refinamento trigonométrico, que apresentou taxas de convergência próximas das taxas do refinamento  $h$  (elemento cúbico), foi mais preciso na obtenção dos autovalores mais altos.

Recentemente, Lu e Law (2007) propuseram modificar o MC na análise de vibrações livres de vigas com a utilização de diferentes funções analíticas, de acordo com as condições de contorno da viga, e considerando os termos de acoplamento das coordenadas nodais e coordenadas  $c$  na matriz de rigidez. No MC original estes termos eram muito pequenos e, portanto considerados nulos. Os resultados obtidos pelo MC modificado para uma viga uniforme engastada-livre mostraram-se mais próximos dos analíticos do que os obtidos pelo MC original. Já na análise de vibrações livres de uma viga de seção transversal com variação linear de altura, as frequências naturais obtidas pelo MC com um elemento e cinco graus de liberdade  $c$  (sete graus de liberdade efetivos), apresentadas na tabela 2.4, indicam que a mudança proposta apresenta resultados mais próximos aos obtidos pelo MEF do que o MC original. Observa-se entretanto, que no método modificado perde-se a generalidade do MC original com a necessidade de utilizar diferentes funções de forma dependendo das condições de contorno do problema.

TABELA 2.4 – FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA VIGA NÃO UNIFORME

Frequência (Hz)	MEF	MC Original	MC Modificado
$\omega_1$	8,257	8,378	8,258
$\omega_2$	33,568	31,773	33,570
$\omega_3$	75,338	74,602	75,345
$\omega_4$	133,742	116,918	133,755

FONTE: LU e LAW (2007)

Lu e Law (2009) também apresentam um procedimento para incorporar um



modelo de trinca ao elemento de viga de Euler-Bernoulli do MC para análise de vibrações e identificação de trincas.

Recentemente, Lu et al (2009) apresentaram um novo método para análise de vibrações livres e forçadas de vigas com mudanças abruptas de seção utilizando o MC. Neste método a viga é analisada através de um único elemento, sem a necessidade de dividi-la em segmentos uniformes entre cada mudança abrupta de seção transversal. Na análise de uma viga livre-livre com uma mudança de seção, os erros relativos entre os resultados do MC e experimentais para as três primeiras frequências foram de 0,31, 0,96 e 1,39%, respectivamente. Na determinação das dez primeiras frequências naturais, de uma viga simplesmente apoiada com três mudanças de seção, utilizando o MEF com 322 graus de liberdade e o MC com 204 graus de liberdade, foi observada uma diferença máxima entre os resultados de 0,107 Hz.

#### 2.2.6 Método dos Elementos Finitos $p$ -Fourier

Leung e Chan (1998) propuseram a utilização de produtos de polinômios e séries de Fourier no lugar de simplesmente polinômios no refinamento  $p$  do MEF. Como as séries de Fourier são bem comportadas e mais efetivas na previsão de modos naturais em média frequência, as limitações no uso de polinômios como funções de forma devido ao seu mau condicionamento quando em grau elevado desaparecem.

O Método dos Elementos Finitos  $p$ -Fourier (MEF Fourier) consiste no enriquecimento do conjunto de funções de forma do MEF convencional pela adição de funções de forma baseadas nas séries de Fourier para elementos de barra, viga de Euler-Bernoulli e placa. As funções de forma enriquecedoras são escolhidas de modo a serem nulas nos nós do elemento, da mesma forma como proposto no MMA de Ganesan e Engels (1992) e no MC.

O MEF Fourier foi aplicado na análise de vibrações livres de vigas de Euler-Bernoulli e placas com diferentes condições de contorno com ótimos resultados. Ao

analisar a vibração livre de vigas uniformes com diversas condições de contorno, verificou-se excelente convergência. Por exemplo, para aproximar a sexta frequência de uma viga com erro relativo de aproximadamente 0,5% foram necessários apenas seis termos da série de Fourier. O MEF Fourier não foi comparado com outros métodos no trabalho de Leung e Chan (1998).

Mais recentemente, Leung e Zhu (2004) apresentaram diversos elementos para análise de vibração no plano de vigas curvas finas e espessas através do MEF Fourier. Para a análise de vibração no plano de sólidos elásticos bidimensionais, também foi apresentado por Leung et al (2004) um elemento trapezoidal para o MEF Fourier.

Leung e Zhu (2004) analisaram a vibração transversal livre de uma viga reta simplesmente apoiada aplicando o elemento proposto por Leung e Chan (1998), e o refinamento  $p$  hierárquico do MEF utilizando polinômios ortogonais de Legendre como funções de forma. Os resultados mostraram que o número de condição da matriz de massa do MEF Fourier é menor que aquele relativo à matriz de massa do MEF  $p$  empregado, indicando uma melhor estabilidade numérica. Além disso, utilizando o MEF Fourier com 498 termos trigonométricos foram obtidos erros percentuais, em relação à solução analítica, inferiores a 0,3 % para todos os autovalores calculados, com exceção dos dois últimos. O MEF Fourier também se mostrou mais preciso do que o MEF  $p$  na determinação dos modos de médias e altas frequências. Os elementos de viga curva propostos por Leung e Zhu (2004) foram aplicados na análise de vibrações livres de anél circular fino, arcos circulares articulados e, arcos engastados e livres uniformes e não uniformes. O MEF Fourier mostrou-se eficiente para prever modos de corpo rígido sem travamento ("locking"), além de apresentar excelente convergência e soluções precisas.

O elemento trapezoidal proposto por Leung et al (2004) foi aplicado na análise de vibrações livres para estados planos de tensão de barra elástica e placas engastadas e livres, e também para o estado plano de deformações de uma barragem de terra com seção transversal triangular. Com a utilização de integração

analítica, as análises empregando o MEF Fourier proposto mostraram-se mais precisas que aquelas realizadas com elementos similares e integração por Quadratura de Gauss. O MEF Fourier mostrou-se mais eficiente na determinação de modos de médias e altas frequências do que o MEF  $p$  utilizando polinômios ortogonais de Legendre, assim como em evitar problemas de mau condicionamento. Os resultados mostraram também que o MEF Fourier é mais preciso que os elementos convencionais do MEF com mesmo número de graus de liberdade e apresenta rápida convergência em relação ao número de termos trigonométricos.

### 2.2.7 Método dos Elementos Finitos Generalizados

Atualmente, vários métodos têm se originado a partir do Método da Partição da Unidade (MPU) (MELENK; BABUSKA, 1996) e têm sido amplamente empregados com bastante sucesso na solução de problemas com domínios complexos, com domínios envolvendo problemas em que há descontinuidades e singularidades, ou quando se deseja enriquecer o subespaço de aproximação com funções que refletem informações previamente conhecidas sobre a solução da equação diferencial governante do problema. Estes métodos aparecem na literatura sob diferentes nomes, porém diferem basicamente na forma de aplicação da partição da unidade.

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (“Generalized Finite Element Method”) foi proposto independentemente por Babuska e outros (MELENK; BABUSKA, 1996; BABUSKA; BANERJEE; OSBORN, 2004; DUARTE; BABUSKA; ODEN, 2000) e por Duarte e Oden (DUARTE; ODEN, 1996; ODEN; DUARTE; ZIENKIEWICZ, 1998) com os seguintes nomes: Método dos Elementos Finitos Especial, Método dos Elementos Finitos Generalizados, Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade, Núvens  $hp$  e Método dos Elementos Finitos baseado nas Núvens  $hp$ . Neste sentido, vários métodos sem malha recentemente propostos podem ser considerados como casos especiais deste método. Por outro lado, Strouboulis et al. (2006) definem a subclasse dos métodos desenvolvidos a partir do

Método da Partição da Unidade incluindo: o Método das Núvens *hp* de Oden e Duarte (DUARTE; ODEN, 1996; ODEN; DUARTE; ZIENKIEWICZ, 1998), o Método dos Elementos Finitos Estendido (MEFE) de Belytschko e outros (SUKUMAR et al, 2000 e 2001), o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) de Strouboulis et al (2000 e 2001), o Método das Esferas Finitas de De e Bathe (2001) e o Método da Partícula - Partição da Unidade de Griebel e Schweitzer (SCHWEITZER, 2008).

Segundo Babuska, Banerjee e Osborn (2001, 2002 e 2004), o Método dos Elementos Finitos Generalizados foi inicialmente idealizado para a solução de problemas elípticos com coeficientes especiais. Já Strouboulis, Babuska e Copps (2000) definem o MEFG simplesmente como a combinação do Método dos Elementos Finitos com o Método da Partição da Unidade.

Duarte, Babuska e Oden (2000) descrevem as principais idéias do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e demonstram algumas de suas vantagens sobre o MEF tradicional na solução de problemas complexos. Entre estas vantagens, destacam-se as habilidades de produzir refinamentos *hp* de elementos finitos com *h* e *p* não uniformes, e de gerar subespaços de aproximações particulares para aplicações específicas. Babuska, Banerjee e Osborn (2004) também descrevem as bases teóricas do método. O Método dos Elementos Finitos (MEF) torna-se, enfim, um caso particular do MEFG.

O Método dos Elementos Finitos Generalizados pode ser então definido como um Método de Galerkin, cujos espaços de aproximações locais consistem de funções, não necessariamente polinomiais, que refletem as informações disponíveis sobre a solução da equação diferencial a ser resolvida e garantem boa aproximação local e global. Este método permite construir um espaço de solução global, a partir de espaços de aproximações locais, sem sacrificar suas propriedades de aproximação, além de garantir a conformidade deste espaço herdada da partição da unidade. Strouboulis, Babuska e Copps (2000) destacam que outra vantagem do método é a possibilidade de utilizar códigos computacionais e algoritmos robustos já

desenvolvidos para o MEF.

As principais bases matemáticas do Método da Partição da Unidade utilizado no MEFG são descritas por Melenk e Babuska (1996) e são apresentadas no capítulo 4. Babuska, Banerjee e Osborn (2001) descrevem princípios para seleção das funções de forma do MEFG.

As funções partição da unidade e as funções enriquecedoras, em certos casos, podem ser linearmente dependentes ou quase linearmente dependentes, mas, segundo Strouboulis, Babuska e Copps (2000), esta dificuldade pode ser facilmente solucionada pela utilização de algoritmos de solução de alto desempenho com pivoteamento parcial ou por uma técnica de perturbação. Estes autores descrevem estratégias de solução da dependência linear e de integração numérica, além de discutirem arquiteturas de códigos computacionais para o MEFG.

Babuska e Zhang (1998) utilizaram o Método da Partição da Unidade, na análise de viga de Timoshenko sob apoio elástico. A construção de um Método dos Elementos Finitos hierárquico baseado na Partição da Unidade é apresentada por Taylor, Zienkiewicz e Oñate (1998).

Diversos trabalhos recentes têm indicado a eficiência do MEFG e outros métodos baseados no Método da Partição da Unidade em problemas tais como análise de trincas (XIAO; KARIHALOO, 2007; ABDELAZIZ; HAMOUINE, 2008; DUARTE; KIM, 2008; NISTOR; PANTALÉ; CAPERAA, 2008), plasticidade (GRACIE; VENTURA; BELYTSCHKO, 2007), grandes deformações em mecânica dos sólidos (KHOEI; ANAHID; SHAHIM, 2008) e equação de Helmholtz (STROUBOULIS; BABUSKA; HIDAJAT, 2006; STROUBOULIS; HIDAJAT; BABUSKA, 2008). Algumas das pesquisas recentes são descritas a seguir a fim de apresentar um breve panorama da aplicabilidade do MEFG em diversas áreas. Embora sejam métodos semelhantes, na literatura não fica claramente estabelecida a diferença entre o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e o Método dos Elementos Finitos Estendido (MEFE) ("Extended Finite Element Method - X-FEM"), sendo ambos citados a seguir como apresentados pelos autores dos trabalhos.

Dolbow (1999) desenvolveu o Método dos Elementos Finitos Estendido baseado no Método da Partição da Unidade com enriquecimento local descontínuo para análise de trincas. O autor apresenta estratégia para modelar descontinuidades arbitrárias, em elasticidade linear bidimensional, através da utilização de funções enriquecedoras descontínuas. Propõe ainda o enriquecimento local da região do vértice da trinca a fim de permitir cálculos precisos dos fatores de intensidade de tensão. O trabalho apresenta detalhes de implementação relacionados à integração numérica e à seleção dos nós a serem enriquecidos. A formulação enriquecida para análise de fratura em placas de Mindlin-Reissner é apresentada. Ele apresenta também o método de solução dos problemas de contato envolvidos e destaca a habilidade do método proposto para modelar o crescimento de trinca sem reconstruções de malha, e ainda considerar diferentes caminhos de trinca com uma malha grosseira.

Como exemplo, a figura 2.2 apresenta os fatores intensidade de momento  $K1$  normalizados, obtidos por Dolbow (1999) através de diferentes análises de uma trinca em uma placa infinita sujeita a um momento.

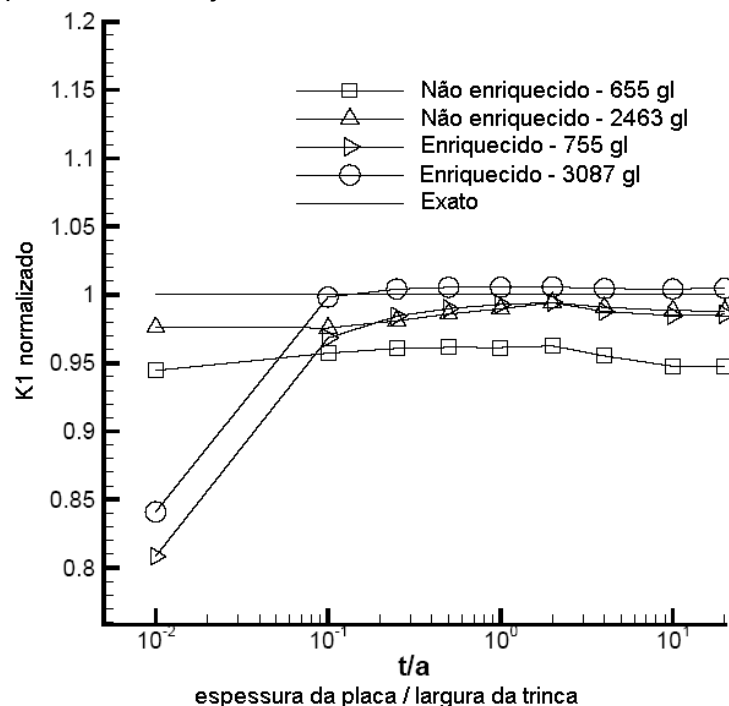


FIGURA 2.2 – FATORES INTENSIDADE DE MOMENTO ( $K1$ ) NORMALIZADOS EM RELAÇÃO À LARGURA DA PLACA  
FONTE: DOLBOW (1999)

A análise utilizando o elemento clássico MITC4 sem enriquecimento, em uma malha com 655 graus de liberdade (gl), apresentou aproximadamente 5% de erro para toda a faixa de espessuras da placa. Já na análise utilizando o elemento enriquecido proposto por Dolbow (1999), em uma malha com apenas 755 graus de liberdade, obteve-se precisão equivalente à obtida com o elemento sem enriquecimento, porém em uma malha com 2463 graus de liberdade. Quando foi empregado o elemento enriquecido em uma malha com 3087 graus de liberdade, o erro diminuiu para aproximadamente 1%.

Mangini (2006) apresenta a aplicação do MEFG com funções enriquecedoras polinomiais na análise de estrutura de cascas de revolução explorando a axissimetria.

Strouboulis et al. (2006) apresentam exemplos de construção de estimadores de erro a posteriori para métodos baseados na partição da unidade e examinam a confiabilidade destes estimadores. Os estimadores de erro a posteriori são importantes ferramentas para verificação da precisão das soluções computacionais.

Xiao e Karihaloo (2007) apresentam a implementação do elemento de trinca híbrido (ETH) ("hybrid crack element") combinado ao MEF. Os fatores de intensidade de tensão têm sido tradicionalmente usados na determinação do início de propagação de trincas, mas estudos recentes mostraram que termos de ordem mais alta do campo assintótico de deslocamentos e tensões no vértice da trinca são de grande relevância para predição de campos elasto-plásticos e para interpretação do efeito de tamanho ("size effect") de materiais quase frágeis. Estudos têm mostrado que o elemento ETH é um dos mais precisos e convenientes para obtenção direta de fatores de intensidade de tensão e de termos de alta ordem. Também é muito eficiente para análise de corpos com múltiplas trincas. O ETH representa uma trinca ou a vizinhança do vértice da trinca através de apenas um super-elemento que é conectado compativelmente com os elementos circundantes que descrevem o restante do domínio.

O trabalho de Xiao e Karihaloo (2007) apresenta a técnica para implementar o ETH em uma malha geral do MEF. O ETH pode ser formado pelos elementos que circundam o vértice da trinca. Estes elementos são descartados da análise, pois suas matrizes de rigidez não são utilizadas. Os nós no interior do ETH também não são utilizados e seus graus de liberdade resultam em pivôs nulos no processo de fatoração. Este problema pode ser evitado pela fixação destes graus de liberdade ou pela sua substituição pela unidade quando encontrados no processo de solução do problema.

No MEF a malha deve se conformar à parte da trinca fora do ETH. Por outro lado o MEFE utilizado por Xiao e Karihaloo (2007) permite o enriquecimento do MEF com descontinuidade de deslocamentos ao longo da trinca e soluções assintóticas no vértice da trinca, evitando também a necessidade de mudanças da malha com a evolução desta. O MEFE apresenta complicações na integração por quadratura devido ao integrando singular e não permite a determinação direta dos termos de ordem superior. A combinação do ETH na região do vértice com o MEFE modelando as faces da trinca fora do super-elemento agrega flexibilidade e alta precisão na determinação dos fatores de intensidade de tensão e dos termos de ordem mais elevada do campo assintótico.

Segundo Chessa e Belytschko (2006), os métodos enriquecidos têm se mostrado bem sucedidos na modelagem de fenômenos estáticos e quase-estáticos tais como os da mecânica da fratura elástica linear e inclusões, e os de não-homogeneidades e micro-estrutura. Porém, em problemas dependentes do tempo eles não têm atingido o mesmo grau de sucesso. Técnicas de semi-discretização clássicas têm sido empregadas em problemas dependentes do tempo, como solidificação, crescimento dinâmico de trincas e problemas de interação fluido estrutura, com moderado sucesso.

Chessa e Belytschko (2006) apresentam um MEFE espaço-tempo localmente enriquecido para solução de problemas hiperbólicos com descontinuidades móveis. O método desenvolvido é baseado em um novo esquema



de enriquecimento espaço-tempo, desenvolvido pelos mesmos autores para determinar descontinuidades em leis de conservação de 1ª ordem, e apresentado em trabalho anterior no ano de 2004. Enquanto os esquemas semi-discretos enriquecidos capturam a descontinuidade, eles tendem a ser oscilatórios na vizinhança desta e apresentar erro na magnitude da descontinuidade. Já a formulação espaço-tempo enriquecida é superior na captura da descontinuidade.

No trabalho de Chessa e Belytschko (2006), o esquema espaço-tempo apresentado anteriormente, no qual as descontinuidades são explicitamente obtidas com enriquecimento, é combinado com formulações clássicas de elementos finitos para problemas hiperbólicos. A formulação enriquecida espaço-tempo é acoplada com elementos finitos semi-discretos fora da região de descontinuidade. O domínio espaço-tempo é subdividido em 2 subdomínios: a região da descontinuidade em que se emprega o enriquecimento espaço-tempo e o restante do domínio que utiliza a formulação semi-discreta clássica. A descontinuidade é modelada por enriquecimento local conforme o MEFE. Uma função é usada para descrever a posição da descontinuidade e a função degrau é utilizada como função enriquecedora junto à descontinuidade.

Chessa e Belytschko (2006) apresentam resultados para dois exemplos: equação da onda linear e equação de Burgers. O resultado obtido pelo MEFE para solução da equação da onda linear é mostrado na figura 2.3. Na figura 2.4 pode-se observar a solução do MEFE para a equação de Burgers. O MEFE utilizado na solução desta equação permitiu que a velocidade do choque fosse determinada com erro inferior a 1%.

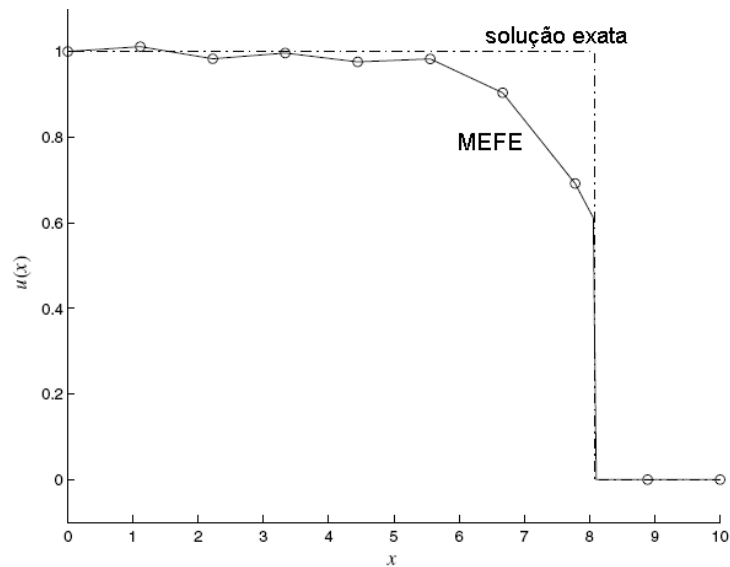


FIGURA 2.3 – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO LINEAR DA ONDA NO TEMPO  $t = 7,0$   
 FONTE: CHESSA E BELYTSCHKO (2006)

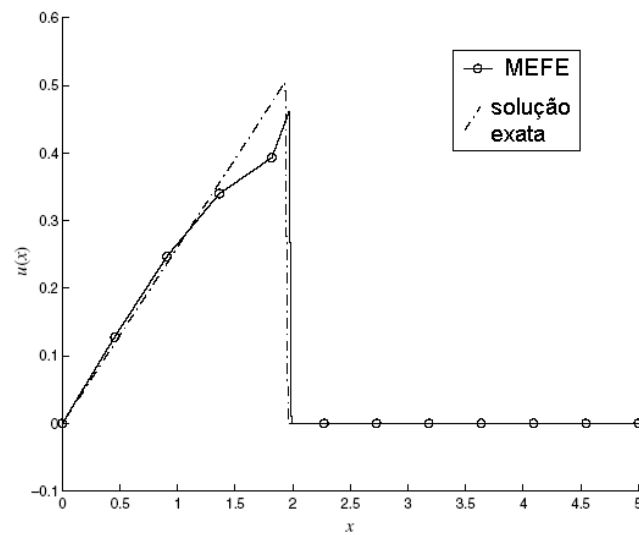


FIGURA 2.4 – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BURGERS NO TEMPO  $t = 2,853$   
 FONTE: CHESSA E BELYTSCHKO (2006)

O estudo de fenômenos fundamentais em plasticidade frequentemente envolve a simulação de deslocamentos de átomos cuja análise normalmente tem alto custo e limitações quanto ao tamanho do modelo. Gracie, Ventura e Belytschko (2007) apresentam uma nova técnica baseada no MEFE onde estes fenômenos são modelados diretamente através de discontinuidades interiores e é aplicado o enriquecimento tangencial.

No trabalho de Gracie, Ventura e Belytschko (2007), um corte é introduzido sobre uma linha de escorregamento e a superfície superior é movida em relação à superfície inferior. Os dois lados da descontinuidade são então reconectados e o campo de tensões é determinado pelas equações governantes do sólido. Com o MEFE, o escorregamento ao longo do plano de deslizamento pode ser modelado sem a necessidade de que as faces dos elementos coincidam com este plano. Uma formulação elástica linear com pequenos deslocamentos é utilizada. A posição do plano de deslizamento e a posição do núcleo são descritas através do uso de funções adequadas. O plano de deslizamento corresponde a uma forte descontinuidade com um salto no campo de deslocamentos. O deslizamento sobre este plano é então introduzido por uma descontinuidade interna prescrita no campo de deslocamentos através do enriquecimento tangencial. Na implementação, a cada função de enriquecimento é somada uma constante para facilitar a imposição de condições de contorno de deslocamentos prescritos. Foram analisados quatro exemplos e verificou-se que o método apresenta excelente precisão, como pode ser observado nos campos de tensão para um domínio semi-infinito obtidos analiticamente e utilizando o MEFE (figura 2.5).

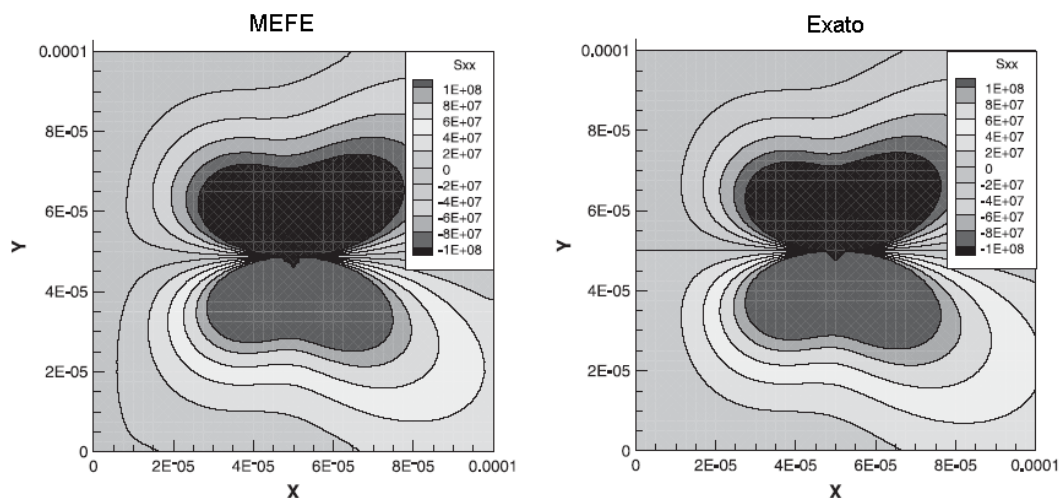


FIGURA 2.5 – TENSÕES  $\sigma_{xx}$  (dyn/cm<sup>2</sup>) PARA UM PLANO SEMI INFINITO  
FONTE: GRACIE, VENTURA E BELYTSCHKO (2007)

A aplicação do Método da Partição da Unidade na análise dinâmica de estruturas não é inédita, embora existam poucos trabalhos nesta área.

De Bel, Villon e Bouillard (2005) apresentaram uma nova técnica baseada no Método da Partição da Unidade para análise de vibrações forçadas em placas finas na faixa das frequências médias. As funções de forma clássicas do MEF foram utilizadas como partição da unidade e a base aproximadora local foi composta pelo conjunto de funções  $\{1, x, y\}$  e mais 4 funções trigonométricas para cada ângulo de propagação de onda, obtidas da solução analítica do problema elastodinâmico homogêneo.

Um método iterativo (figura 2.6) é proposto por De Bel, Villon e Bouillard (2005) a fim de adaptar o ângulo de propagação de onda das funções que compõem a base local.

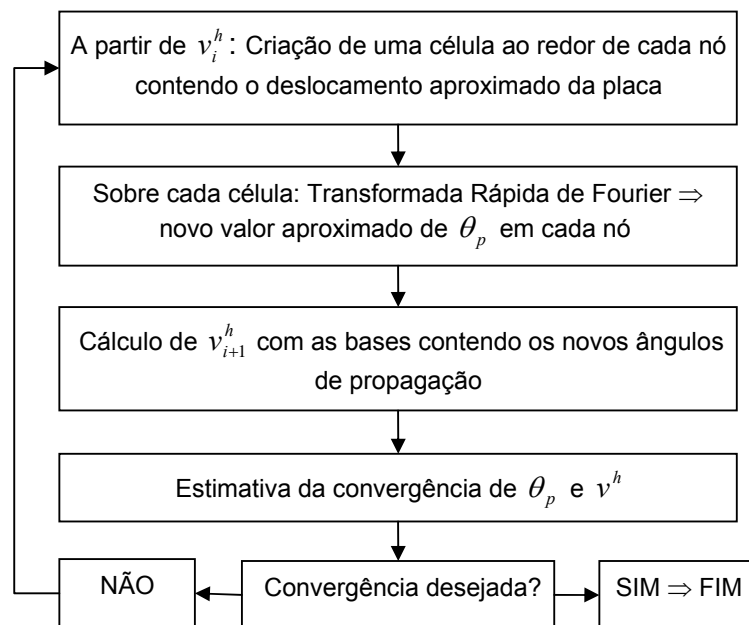


FIGURA 2.6 – ESQUEMA ITERATIVO  
FONTE: DE BEL, VILLON E BOUILLARD (2005)

No método iterativo, uma primeira solução do problema com valores iniciais do ângulo de propagação ( $\theta_p$ ) é necessária para obter uma primeira aproximação do campo de deslocamentos ( $v^h$ ). Os passos subsequentes seguem o esquema

apresentado na figura 2.6 até que a convergência sobre  $\theta_p$  e  $v^h$  seja alcançada. Uma análise utilizando a Transformada Rápida de Fourier é realizada em todos os nós para determinar as novas bases locais com os novos ângulos de propagação. Na análise de uma placa excitada a 1000 Hz, por exemplo, foram suficientes cinco iterações do método, utilizando uma malha 3x3 e três ângulos de propagação (720 graus de liberdade), para uma boa aproximação da solução, em comparação com a solução de referência obtida pelo MEF com 136.806 graus de liberdade. Para imposição das condições de contorno, De Bel, Villon e Bouillard (2005) sugerem a utilização de um método de penalidades, uma vez que, no método proposto por eles, esta não pode ser implementada diretamente como no MEF.

O Método da Partição da Unidade, juntamente com a técnica de elemento de interface, foi utilizado por Hazard e Bouillard (2007) para análise numérica de vibrações de estruturas tipo sanduíche equipadas com camadas visco-elásticas passivas de amortecimento. Estes pesquisadores formularam um elemento de placa de Mindlin aplicando a técnica da partição da unidade com enriquecimento polinomial. Utilizaram também um método de penalidade para impor as condições de contorno essenciais. Uma das aplicações, utilizada para verificar a eficiência do elemento de placa proposto, consiste na análise de uma placa de aço retangular livre excitada por uma força pontual a 2000 Hz no canto inferior esquerdo. A solução de referência usada corresponde a um modelo com 7623 graus de liberdade. As soluções do MPU proposto com diferentes graus de polinômios ( $p$ ) são comparadas a três diferentes implementações do MEF. A primeira, denotada simplesmente por MEF, corresponde à aplicação da técnica de integração reduzida seletiva ao elemento do MPU sem enriquecimento e as outras duas correspondem ao uso do software ACTRAN com elementos de placa lineares e quadráticos. A curva de convergência para estes métodos é apresentada na figura 2.7. Pode-se observar que as análises utilizando o MPU apresentaram as maiores taxas de convergência.

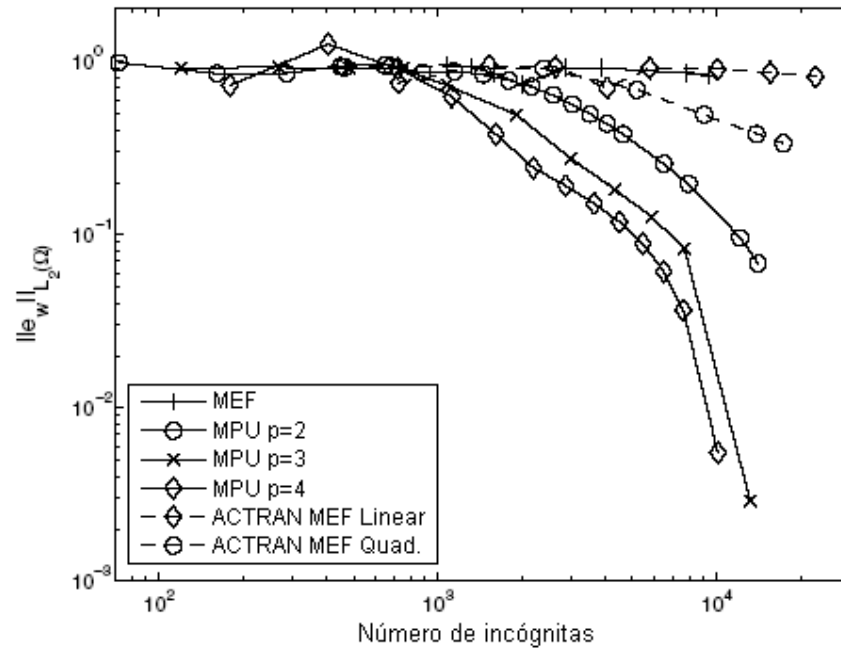


FIGURA 2.7 – CURVAS DE CONVERGÊNCIA PARA PLACA EXCITADA A 2000 HZ  
 FONTE: HAZARD E BOUILLARD (2007)

A aplicabilidade e eficiência do método proposto na análise de placas visco-elásticas foi verificada por Hazard e Bouillard (2007) ao comparar seus resultados com resultados numéricos e experimentais disponíveis.

### 3 PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE DE ESTRUTURAS RETICULADAS

Neste capítulo são discutidos os problemas de vibração livre de estruturas, inicialmente de uma forma geral, à luz de conceitos da análise funcional. As principais propriedades dos autovalores e autovetores são estabelecidas e são apresentadas estimativas de erro para análises aproximadas.

Na sequência do capítulo são discutidas, de maneira específica, as formulações variacionais e as principais soluções analíticas e aproximadas dos problemas de vibração livre de barras, eixos e vigas de Euler-Bernoulli. Estes conceitos são então estendidos aos problemas de vibrações livres de estruturas reticuladas.

#### 3.1 ANÁLISE ABSTRATA DOS PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE

Os problemas de vibração livre de estruturas, de maneira geral, são problemas lineares de autovalores que podem ser descritos como: “encontre o par  $(\lambda, u)$  tal que

$$Tu = \lambda Qu \quad \text{em } \Omega, \text{ com} \quad (3.1)$$

$$Pu = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \quad (3.2)$$

onde  $T$ ,  $Q$  e  $P$  são operadores lineares e  $\partial\Omega$  corresponde ao contorno de  $\Omega$ . No caso de problemas de valor de contorno elípticos, como os problemas de vibração livre de barras, eixos estacionários e vigas de Euler-Bernoulli, o operador  $T$  é um operador linear elíptico de ordem  $2m$  e  $P$  é um operador de contorno compatível de ordem  $m$ . Além disso, como os problemas de vibração livre de estruturas são derivados de leis conservativas, admite-se que o operador  $T$  é formalmente auto-adjunto (CAREY; ODEN, 1984a).

Em muitos problemas práticos, como a vibração livre de barras ou vigas uniformes, o operador  $Q$  corresponde ao operador identidade, então o problema de autovalores da equação (3.1) transforma-se em um problema de autovalores convencional na forma:

$$Tu - \lambda Iu = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.3)$$

onde  $I$  é o operador identidade.

Aplicando o método dos resíduos ponderados obtém-se a forma variacional deste problema. Associado ao operador linear elíptico  $T$ , surge então uma forma bilinear  $B(u, w)$  na forma:

$$B(u, w) = \int_{\Omega} \left[ a_{mm}^{11} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} \frac{\partial^m w}{\partial x_1^m} + a_{mm-1}^{11} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} \frac{\partial^{m-1} w}{\partial x_1^{m-1}} + \dots + a_{mm}^{NN} \frac{\partial^m u}{\partial x_N^m} \frac{\partial^m w}{\partial x_N^m} + \dots + a_{00}^{NN} uw \right] dx \quad (3.4)$$

onde  $\Omega$  é um domínio aberto limitado em  $R^n$ . Logo, a forma variacional para o problema de autovalores convencional (eq. (3.3)) toma a forma: “encontre o par  $(\lambda, u)$  com  $u \in H$  satisfazendo as condições essenciais  $Pu = 0$  sobre  $\partial\Omega$  tal que:

$$B(u, w) = \lambda(u, w) \quad \forall w \in H \quad (3.5)$$

onde  $H \subset H^m(\Omega)$  é a classe de funções admissíveis e  $(u, w)$  indica o produto interno em  $L^2$ .

A existência de solução para estes problemas, as propriedades dos autovalores e autovetores e as estimativas de erro para métodos aproximados são discutidas nos próximos tópicos.

### 3.1.1 Conceitos da análise funcional

O objetivo desta seção é apresentar os principais conceitos e teoremas da



análise funcional relativos aos problemas analisados. Os teoremas aqui apresentados estão demonstrados no trabalho de Kreyszig (1978).

Inicialmente é necessário definir formalmente os operadores associados ao problema linear de autovalores da equação (3.3), para então estabelecer o espectro do operador  $T$ , onde se encontra o conjunto dos autovalores associados ao problema, denominado de espectro pontual ou discreto de  $T$ .

Seja  $X \neq \{0\}$  um espaço normado complexo e  $T : D(T) \rightarrow X$  um operador linear com domínio  $D(T) \subset X$ . Seja também o operador

$$T_\lambda = T - \lambda I \quad (3.6)$$

onde  $\lambda$  é um número complexo e  $I$  é o operador identidade sobre  $D(T)$ . O operador inverso de  $T_\lambda$ , se existir, é denotado por  $R_\lambda(T)$  e dado por:

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1} \quad (3.7)$$

sendo conhecido como operador resolvente de  $T$ , pois se  $T_\lambda x = y$ , então  $x = T_\lambda^{-1} y = R_\lambda(T) y$ .

Neste contexto, um valor regular  $\lambda$  de  $T$  é um número complexo tal que  $R_\lambda(T)$  existe, é limitado e ainda é definido sobre um conjunto que é denso em  $X$ . O conjunto resolvente  $\rho(T)$  de  $T$  é o conjunto de todos os valores regulares de  $\lambda$  de  $T$ . Seu complemento  $\sigma(T) = C - \rho(T)$  no plano complexo  $C$  é chamado espectro de  $T$  e  $\lambda \in \sigma(T)$  é chamado de valor espectral de  $T$ .

O espectro  $\sigma(T)$  é particionado em três conjuntos disjuntos:

- a) O espectro pontual ou discreto  $\sigma_p(T)$  que corresponde ao conjunto em que  $R_\lambda(T)$  não existe. Um  $\lambda \in \sigma_p(T)$  é chamado de autovalor de  $T$ .
- b) O espectro contínuo  $\sigma_c(T)$  que corresponde ao conjunto em que  $R_\lambda(T)$  existe e é definido sobre um conjunto denso em  $X$ , porém é ilimitado.
- c) O espectro residual  $\sigma_r(T)$  que corresponde ao conjunto em que  $R_\lambda(T)$

existe (e pode ser limitado ou não), mas cujo domínio não é denso em  $X$ .

O operador  $R_\lambda(T)$  é linear e, existe se e somente se  $T_\lambda x = 0$  implica que  $x = 0$ , ou seja, o núcleo de  $T_\lambda$  é  $\{0\}$ .

Consequentemente, se  $T_\lambda x = (T - \lambda I)x = 0$  para algum  $x \neq 0$ , então  $\lambda \in \sigma_p(T)$  por definição, ou seja,  $\lambda$  é um autovalor de  $T$ . O vetor  $x$  é então chamado de autovetor de  $T$  (ou autofunção de  $T$  se  $X$  é um espaço de funções) correspondente ao autovalor  $\lambda$ . O subespaço de  $D(T)$  constituído do vetor nulo e de todos os autovetores de  $T$  correspondentes a um autovalor  $\lambda$  é chamado autoespaço de  $T$  correspondente àquele autovalor  $\lambda$ .

Estabelecido o problema de autovalores, pode-se demonstrar através da alternativa de Fredholm a existência de solução para este problema quando envolve um operador linear compacto. Sendo assim, faz-se necessário apresentar a definição de operador linear compacto e alguns teoremas relacionados a ele.

Sendo  $X$  e  $Y$  espaços normados, um operador  $T: X \rightarrow Y$  é chamado operador linear compacto (ou operador linear completamente contínuo) se  $T$  é linear e se para todo subconjunto limitado  $M$  de  $X$ , a imagem  $T(M)$  é relativamente compacta, ou seja, o fechamento  $[T(M)]$  é compacto.

Na sequência são apresentados alguns teoremas que permitem identificar operadores lineares compactos.

**Teorema 1:** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $T: X \rightarrow Y$  um operador linear. Então  $T$  é compacto se e somente se mapeia toda sequência limitada  $(x_n)$  em  $X$  em uma sequência  $(Tx_n)$  em  $Y$  que tem uma subsequência limitada.

**Teorema 2:** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $T: X \rightarrow Y$  um operador linear. Então:

- a) Se  $T$  é limitado e  $\dim T(X) < \infty$ , o operador  $T$  é compacto.
- b) Se  $\dim X < \infty$ , o operador  $T$  é compacto.

Os teoremas 3 e 4, por sua vez, apresentam algumas características dos autovalores de um operador linear compacto.

**Teorema 3:** O conjunto de autovalores de um operador linear compacto  $T : X \rightarrow Y$  sobre um espaço normado  $X$  é contável e o único ponto de acumulação possível é  $\lambda = 0$ .

Este teorema mostra que se um operador linear compacto em um espaço normado tem um número infinito de autovalores, estes podem ser arranjados em uma sequência convergindo para o zero.

**Teorema 4:** Seja  $T : X \rightarrow Y$  um operador linear compacto sobre um espaço de Banach  $X$ . Então todo valor espectral  $\lambda \neq 0$  de  $T$  (se existe) é um autovalor de  $T$ .

A teoria de existência de solução para certas equações envolvendo um operador linear compacto envolve também os conceitos de espaço dual e operador adjunto que são descritos a seguir. Alguns teoremas envolvendo o espaço dual e o operador adjunto também são apresentados.

O conjunto de todos os funcionais lineares limitados  $f$  sobre um espaço normado  $X$  constitui um espaço normado  $X'$  com norma definida por:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)| \quad (3.8)$$

e que é chamado de espaço dual de  $X$ .

Seja  $T : X \rightarrow Y$  um operador linear limitado, onde  $X$  e  $Y$  são espaços normados. Então o operador adjunto  $T^X : Y' \rightarrow X'$  de  $T$  é definido por

$$f(x) = (T^X g)(x) = g(Tx) \quad (g \in Y') \quad (3.9)$$

onde  $X'$  e  $Y'$  são os espaços duais de  $X$  e  $Y$ , respectivamente (figura 3.1).

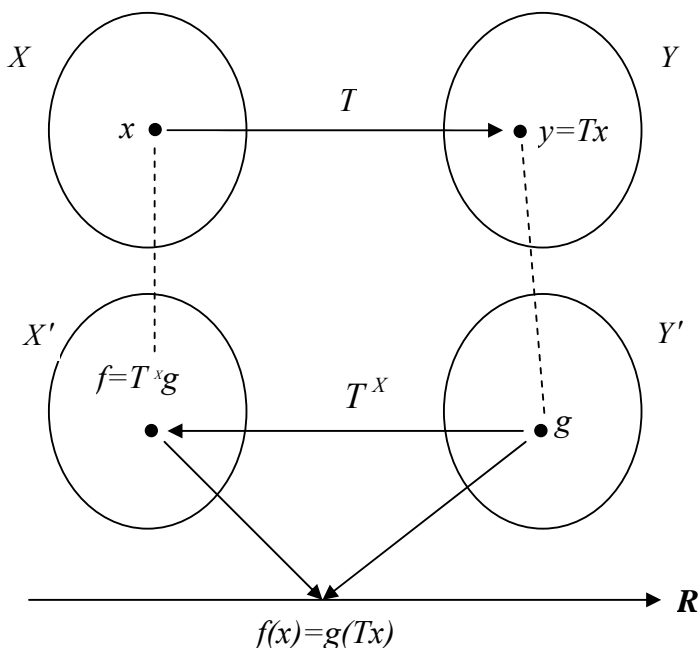


FIGURA 3.1 – ESQUEMA DE ESPAÇOS DUAIS

**Teorema 5:** O espaço dual  $X'$  de um espaço normado  $X$  é um espaço de Banach (sendo ou não  $X$ ).

**Teorema 6:** Seja  $T: X \rightarrow Y$  um operador linear. Se  $T$  é compacto, então seu operador adjunto  $T^X: Y' \rightarrow X'$  também é compacto.

A partir destas definições e teoremas, pode-se estabelecer a teoria da existência de solução para certas equações envolvendo um operador linear compacto através da alternativa de Fredholm, a seguir apresentada.

Um operador linear limitado  $A: X \rightarrow Y$  sobre um espaço normado  $X$  satisfaz a alternativa de Fredholm se  $A$  é tal que ou a afirmativa (I) ou a afirmativa (II) são válidas:

- (I) As equações não homogêneas  $Ax = y$  e  $A^X g = f$  ( $A^X: Y' \rightarrow X'$  é o operador adjunto de  $A$ ) têm soluções  $x$  e  $g$ , respectivamente, para

todo  $y \in Y$  e  $f \in X'$  dado, sendo soluções únicas. As equações homogêneas correspondentes  $Ax = 0$  e  $A^X g = 0$  têm apenas soluções triviais  $x = 0$  e  $g = 0$ , respectivamente.

- (II) As equações homogêneas  $Ax = 0$  e  $A^X g = 0$  têm o mesmo número de soluções linearmente independentes  $x_1, \dots, x_n$  e  $g_1, \dots, g_n$  ( $n \geq 1$ ) respectivamente. As equações não homogêneas  $Ax = y$  e  $A^X g = f$  não têm solução para todo  $y$  e  $f$ , respectivamente. Estas equações não homogêneas têm uma solução se e somente se  $y$  e  $f$  são tais que  $g_k(y) = 0$  e  $f(x_k) = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ), respectivamente.

O próximo teorema permite enfim relacionar a alternativa de Fredholm ao problema de autovalores linear da equação (3.3).

**Teorema 7:** Seja  $T : X \rightarrow X$  um operador linear compacto sobre um espaço normado  $X$ , e seja  $\lambda \neq 0$ . Então  $T_\lambda = T - \lambda I$  satisfaz a alternativa de Fredholm.

Com relação aos espaços de Hilbert, os conceitos de operador Hilbert-adjunto e operador auto-adjunto interessam ao escopo deste trabalho, uma vez que o operador  $T$  da equação (3.3) é um operador auto-adjunto.

Logo, seja  $T : H_1 \rightarrow H_2$  um operador linear limitado, onde  $H_1$  e  $H_2$  são espaços de Hilbert. Então o operador Hilbert-adjunto  $T^*$  de  $T$  é o operador  $T^* : H_1 \rightarrow H_2$  tal que, para todo  $x \in H_1$  e  $y \in H_2$ ,  $(Tx, y) = (x, T^*y)$ , onde  $(\cdot, \cdot)$  corresponde ao produto interno. Demonstra-se ainda que o operador Hilbert-adjunto  $T^*$  existe, é único e tem norma  $\|T^*\| = \|T\|$ . Por outro lado, se um operador linear  $T : H \rightarrow H$  for tal que  $T^* = T$ , sendo  $T^*$  o operador Hilbert-adjunto de  $T$ , ele é denominado operador auto-adjunto.

Por fim pode-se estabelecer as características dos autovalores e autovetores para operadores lineares auto-adjuntos limitados, como mostra o teorema a seguir.

**Teorema 8:** Seja  $T : H \rightarrow H$  um operador linear auto-adjunto limitado sobre um espaço de Hilbert complexo  $H$ . Então:

- a) Todos os autovalores de  $T$  (se eles existem) são reais.
- b) Autovetores correspondentes a diferentes autovalores de  $T$  são ortogonais.

No próximo tópico são discutidas as principais propriedades dos autovalores e autovetores associados aos problemas de vibração livre de estruturas reticuladas.

### 3.1.2 Propriedades dos autovalores e autovetores

Com base nas características dos problemas lineares de autovalores (eq. (3.3)) e nos teoremas apresentados, pode-se concluir que: o espectro de autovalores de  $T$  é contável, os autovalores são reais e autovetores correspondentes a dois autovalores distintos são ortogonais. Estas propriedades também podem ser demonstradas a partir da forma variacional do problema (eq. (3.5)), conforme apresentado por Carey e Oden (1984a).

Se  $u^r$  for o autovetor associado ao autovalor  $\lambda^r$ , ao tomar  $u = u^r$  na forma variacional (eq. (3.5)) obtém-se:

$$B(u^r, w) = \lambda^r (u^r, w) \quad \forall w \in H \quad (3.10)$$

Logo, tomando-se  $w = u^r \neq 0$  na equação (3.10), surge o quociente de Rayleigh definido por:

$$R(u^r) = \lambda^r = \frac{B(u^r, u^r)}{(u^r, u^r)} \quad \text{ou ,} \quad (3.11)$$

$$R(u^r) = \lambda^r = \frac{B(u^r, u^r)}{\|u^r\|_0^2} \quad (3.12)$$

sendo

$$\|u\|_m = \sqrt{(u, u)_m}, \text{ e} \quad (3.13)$$

$$(u, w)_m = \int_{\Omega} \left( \frac{d^m u}{dx^m} \cdot \frac{d^m w}{dx^m} + \dots + \frac{du}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} + uw \right) dx \quad \text{para } \Omega \text{ em } R. \quad (3.14)$$

No caso em que o operador  $T$  é elíptico e regular,  $B(u, w)$  é contínuo e coercivo, ou seja (CAREY; ODEN, 1984a):

$$B(u, w) \leq M \|u\|_m \|w\|_m \quad (3.15)$$

$$B(u, w) \geq \alpha \|w\|_m^2 \quad \forall u, w \in H \quad (3.16)$$

onde  $M$  e  $\alpha$  são constantes estritamente positivas. E a partir do quociente de Rayleigh (eq. (3.12)), pode-se escrever que:

$$\lambda^r = \frac{B(u^r, u^r)}{\|u^r\|_0^2} \geq \alpha \frac{\|u^r\|_m^2}{\|u^r\|_0^2} \geq \alpha > 0 \quad (3.17)$$

uma vez que  $\|u^r\|_0 \leq \|u^r\|_m$ ,  $m \geq 0$ .

Considerando ainda a relação de continuidade (eq. (3.15)), pode-se afirmar que o autovalor  $\lambda^r$  está limitado da seguinte forma:

$$0 < \alpha \leq \alpha \frac{\|u^r\|_m^2}{\|u^r\|_0^2} \leq \lambda^r \leq M \frac{\|u^r\|_m^2}{\|u^r\|_0^2} \quad (3.18)$$

Para o caso mais geral do problema de autovalores (onde o operador  $Q$  não é o operador identidade), o autovalor  $\lambda^r$  fica limitado por:

$$\alpha \frac{\|u^r\|_m^2}{F(u^r, u^r)} \leq \lambda^r \leq M \frac{\|u^r\|_m^2}{F(u^r, u^r)} \quad (3.19)$$

onde  $F(u^r, u^r)$  é a forma bilinear correspondente ao operador  $Q$ . As equações (3.18) e (3.19) permitem estabelecer estimativas de erro no processo de solução aproximada dos problemas lineares de autovalores.

### 3.1.3 Estimativas de erro no processo de aproximação dos problemas de autovalores e autovetores

A real precisão de uma solução aproximada só pode ser determinada através da comparação com a solução analítica (exata) do problema, raramente disponível. Logo, a precisão e convergência das soluções aproximadas em problemas práticos podem ser avaliadas através dos chamados estimadores de erro. O objetivo deste tópico é discutir alguns estimadores de erro para problemas lineares de autovalores.

Uma vez que os autovalores são reais e positivos, estes podem ser arranjados em ordem crescente de magnitude na forma  $0 < \lambda^1 \leq \lambda^2 \leq \dots \leq \lambda^r \leq \dots$ . Os autovetores (ou autofunções)  $\{u^r\}$ , por sua vez, podem ser normalizados. Como o conjunto  $\{u^r\}$  corresponde a uma base ortogonal completa em  $L^2(\Omega)$ , então qualquer função admissível  $w \in H$  pode ser expressa como uma expansão destas autofunções na forma (CAREY; ODEN, 1984a):

$$w(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u^i(x) \quad (3.20)$$

$$c_i = (w, u^i) \quad (3.21)$$

Substituindo esta expansão no quociente de Rayleigh  $R(w)$  (eq. (3.12)), obtém-se:



$$R(w) = \frac{B(w, w)}{\|w\|_0^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^{\infty} c_i c_j B(u^i, u^j)}{\sum_{i,j=1}^{\infty} c_i c_j (u^i, u^j)}, \quad (3.22)$$

de maneira que

$$R(w) = \frac{\sum_{i,j=1}^{\infty} c_i c_j \lambda^i \delta_{ij}}{\sum_{i,j=1}^{\infty} c_i c_j \delta_{ij}} = \frac{c_1^2 \lambda^1 + c_2^2 \lambda^2 + \dots}{c_1^2 + c_2^2 + \dots} \quad (3.23)$$

Como  $\lambda^1 \leq \lambda^2 \leq \dots$ , conclui-se que o mínimo  $R(w)$  para todos os  $w$  admissíveis deve ser o autovalor  $\lambda^1$ . Observa-se também que, o mínimo  $R(w)$  para todos os  $w$  ortogonais a  $u^1, u^2, \dots, u^s$  é o autovalor  $\lambda^{s+1}$ . Finalmente, seja o conjunto  $\{w_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s-1$ , de funções contínuas em  $\Omega$ . Se  $R(w)$  é minimizado sobre todas as  $w$  admissíveis com  $(w, w_j) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, s-1$ , o máximo destes mínimos sobre todo o conjunto  $\{w_j\}$  é o autovalor  $\lambda^s$ . Este é o princípio máximo-mínimo de Courant. Este mesmo princípio pode ser utilizado para obter um limite superior para os autovalores aproximados, servindo ainda como estimador de erro. Para este propósito é melhor transformá-lo em um princípio de mínimo-máximo, uma vez que, se  $R(w)$  é maximizado sobre um subespaço de dimensão  $s$ , o mínimo valor possível deste máximo sobre todos estes subespaços é o autovalor  $\lambda^s$  (CAREY; ODEN, 1984a).

No espaço de aproximação  $H^h$  de dimensão  $n$ , a solução aproximada do problema toma a forma variacional: encontre o par  $(\lambda_h, u_h)$  com  $u_h \in H^h$  tal que:

$$B(u_h, w_h) = \lambda_h (u_h, w_h) \quad \forall w_h \in H^h \quad (3.24)$$

A este problema correspondem  $n$  autovalores com as mesmas propriedades descritas na seção anterior.

O princípio mínimo-máximo apresentado por Carey e Oden (1984a), sendo  $H_s^h$  um subespaço de dimensão  $s$  de  $H^h$ , estabelece que:

$$\lambda_h^s = \min_{H_s^h} \max_{w_h \in H_s^h} R(w_h) \quad (3.25)$$

onde o mínimo é tomado sobre todos os subespaços  $H_s^h$  de  $H^h$ .

Conclui-se também que

$$\lambda^s \leq \lambda_h^s \quad (3.26)$$

uma vez que a minimização na equação (3.25) é restrita aos subespaços aproximados de dimensão  $s$ , enquanto o mesmo princípio também se aplica ao autovalor exato  $\lambda^s$  sobre o espaço infinito  $H$ , como mostrado anteriormente.

Como  $\lambda_h^s$  é um mínimo sobre todos os subespaços  $H_s^h \subset H^h$  pode-se escrever que:

$$\lambda_h^s \leq \max_{w_h \in H_s^h} R(w_h) = \max_{w_h \in H_s^h} \frac{B(w_h, w_h)}{\|w_h\|_0^2} \quad (3.27)$$

Se  $w_h \in H_s^h \subset H^h$ , então  $w_h$  pode ser construído a partir das funções  $v \in H$  por projeção, sendo que a projeção elíptica de uma função  $v \in H$  em  $H^h$ , com respeito à forma bilinear  $B$ , é definida como a função  $v_h \in H^h$  satisfazendo:

$$B(v - v_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in H^h \quad (3.28)$$

Expandindo os funcionais quadráticos  $B(v - v_h, v - v_h)$  e utilizando a desigualdade triangular, obtém-se a desigualdade (CAREY; ODEN, 1984a):

$$B(v_h, v_h) \leq B(v, v) \quad (3.29)$$

Carey e Oden (1984a) definem ainda o parâmetro

$$K = 1 - \max_{\substack{v \in H_s \\ \|v\|=1}} |2(v, v - v_h) - (v - v_h, v - v_h)| \quad (3.30)$$

que, utilizado na equação (3.27), fornece:

$$\lambda_h^s \leq \max_{v_h \in H_s^h} \frac{B(v_h, v_h)}{\|v_h\|_0^2} \leq \max_{\substack{v \in H_s \\ \|v\|=1}} \frac{B(v, v)}{K} \quad (3.31)$$

onde  $H_s$  é o subespaço de dimensão  $s$  de  $H$  expandido pelas autofunções exatas  $u^1, u^2, \dots, u^s$ .

A equação (3.31) implica em que

$$\lambda_h^s \leq \frac{\lambda^s}{K} \quad (3.32)$$

Logo, para se estabelecer um limite superior para os autovalores basta obter uma estimativa para  $1/K$ .

Conforme Carey e Oden (1984a), para interpolação nas bases polinomiais utilizadas no MEF convencional, pode-se estabelecer que:

$$\|v - v_h\|_0^2 \leq C_1^2 [h^{k+1} + h^{2(k+1-m)}]^2 \|v\|_{k+1}^2, \text{ e} \quad (3.33)$$

$$|(v, v - v_h)| \leq C_2 h^{2(k+1-m)} (\lambda^s)^{[(k+1)/m]-1} \quad (3.34)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes,  $2m$  é a ordem do operador diferencial  $T$ ,  $k$  é o grau da base polinomial do elemento e  $h$  é o diâmetro máximo dos elementos.

As desigualdades das equações (3.33) e (3.34) permitem escrever que:

$$K < 1 - \left| 2C_2 h^{2(k+1-m)} (\lambda^s)^{[(k+1)/m]-1} - C_1^2 [h^{k+1} + h^{2(k+1-m)}]^2 \|v\|_{k+1}^2 \right| \quad (3.35)$$

A partir das equações (3.26), (3.31) e (3.35), pode-se estabelecer os seguintes limites para o autovalor aproximado  $\lambda_h^s$  (CAREY; ODEN, 1984a):

$$\lambda^s \leq \lambda_h^s \leq \lambda^s + C_3 h^{2(k+1-m)} (\lambda^s)^{(k+1)/m} \quad (3.36)$$

onde  $C_3$  é constante e  $h$  é suficientemente pequeno tal que  $|K| < 1$ . Subtraindo  $\lambda^s$  de ambos os termos da desigualdade obtém-se:

$$0 \leq \lambda_h^s - \lambda^s \leq C_3 h^{2(k+1-m)} (\lambda^s)^{(k+1)/m} \quad (3.37)$$

Substituindo o diâmetro máximo dos elementos  $h$  pelo número de graus de liberdade  $N$ , obtém-se:

$$0 \leq \lambda_h^s - \lambda^s \leq C_4 N^{-2(k+1-m)} (\lambda^s)^{(k+1)/m} \quad (3.38)$$

onde  $C_4$  é uma constante.

Observa-se portanto que a magnitude do erro na determinação de um determinado autovalor aproximado  $\lambda_h^s$  depende da magnitude do autovalor exato  $\lambda^s$ , ou seja, os autovalores de ordem mais elevada exigirão progressivamente maior custo computacional para serem obtidos com uma mesma precisão estabelecida. Essa dificuldade justifica estudos que visem a determinação de autovalores de mais alta ordem com grande precisão e menores custos computacionais.

Para aplicar este resultado aos autovetores, admite-se que os autovetores exatos  $u^r$  e aproximados  $u_h^r$  foram normalizados de forma que  $(u^r, u^r) = (u_h^r, u_h^r) = 1$ . Expandindo o funcional quadrático  $B(u^s - u_h^s, u^s - u_h^s)$  e utilizando a estimativa da equação (3.34), estabelecem-se os limites de erro no espaço  $L^2$  como (CAREY; ODEN, 1984a):

$$\|u^s - u_h^s\|_0 \leq C_1 \left[ h^{k+1} + h^{2(k+1-m)} (\lambda^s)^{(k+1)/m} \right] \quad (3.39)$$

e no espaço  $H^m$  como:

$$\|u^s - u_h^s\|_m \leq C_2 h^{2(k+1-m)} (\lambda^s)^{(k+1)/m} \quad (3.40)$$

Nas análises de problemas lineares de autovalores utilizando o MEF convencional, estimativas de erro a priori podem ser obtidas através das desigualdades (3.37), (3.39) e (3.40).

De maneira análoga, Ladeveze, Coffignal e Pelle (1986) propuseram dois métodos para estimar os limites dos autovalores aproximados, um para a formulação cinemática ou dos deslocamentos (eq. (3.24)) e outro para a formulação estática. Para a formulação cinemática, estes pesquisadores provaram a seguinte desigualdade fundamental baseada no quociente de Rayleigh:

$$\lambda_h^s \left( 1 + \frac{\lambda_h^s}{k_c} \right)^{-1} \leq \lambda^s \leq \lambda_h^s \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (3.41)$$

onde  $k_c$  é uma constante característica do subespaço de aproximação  $H^h$  definida por:

$$k_c = \inf R(w), \quad w \in H^{h(\perp)} \quad (3.42)$$

sendo que  $H^{h(\perp)}$  corresponde ao complemento ortogonal de  $H^h$  em  $H$ . A constante  $k_c$  depende essencialmente do tipo de elemento e do seu tamanho.

Ladeveze, Coffignal e Pelle (1986) também propuseram um coeficiente de redução do diâmetro do elemento dependente das estimativas de erro a posteriori das formulações cinemática e estática, para obtenção de malhas ótimas de elementos para o problema de vibração livre de membranas.

Em resumo, pode-se afirmar que os problemas lineares de autovalores aqui analisados apresentam as seguintes características:

- (a) A solução existe;
- (b) Os autovalores são reais;
- (c) Autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais; e
- (d) Os autovalores são limitados, permitindo assim a determinação de estimadores de erro.

Estabelecida uma visão geral e abstrata do problema, nas próximas seções são apresentadas as características específicas dos problemas de vibração livre de barras, eixos, vigas de Euler-Bernoulli e estruturas reticuladas, bem como as principais soluções analíticas e métodos aproximados para estes problemas.

### 3.2 BARRA RETA COM VIBRAÇÃO AXIAL

Uma barra consiste em uma haste reta com deformação axial (longitudinal) (figura 3.2) cujas hipóteses básicas são:

- (a) As seções transversais planas e normais ao eixo da barra após a deformação permanecem planas e normais; e
- (b) O material é elástico, linear e homogêneo.

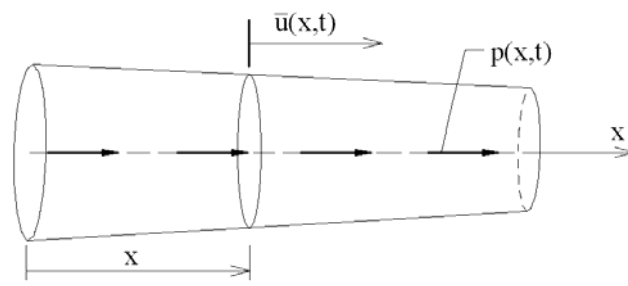


FIGURA 3.2 – BARRA RETA COM DEFORMAÇÃO AXIAL

A vibração da barra é um problema dependente do tempo, e a equação do movimento que governa este problema é uma equação diferencial parcial. O problema consiste em encontrar o deslocamento axial  $\bar{u}$  que satisfaz:

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = p(x, t) \quad (3.43)$$

onde  $A = A(x)$  é a área da seção transversal,  $E = E(x)$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $\rho$  é a massa específica,  $p$  é a força axial aplicada por unidade de comprimento e  $t$  é o tempo. A solução  $\bar{u} = \bar{u}(x, t)$  deve satisfazer as condições iniciais e de contorno definidas no problema.

### 3.2.1 Solução analítica

Particularizando o problema para o caso de vibração livre de barra prismática, onde  $E$ ,  $A$  e  $\rho$  são constantes e  $p(x, t) = 0$ , a equação (3.43) reduz-se a:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.44)$$

Para solução desta equação pode-se utilizar o método da separação das variáveis que, embora seja considerado o método sistemático mais antigo para resolver equações diferenciais parciais, é muito importante e bastante utilizado. Admite-se a hipótese de que  $\bar{u}(x, t)$  é um produto de duas outras funções, uma dependente apenas de  $x$  e outra dependente apenas de  $t$ . Assim:

$$\bar{u}(x, t) = u(x) T(t) \quad (3.45)$$

Substituindo a equação (3.45) na equação (3.44), obtém-se:

$$\frac{\rho}{E} \frac{d^2 T / dt^2}{T} = \frac{d^2 u / dx^2}{u} = \alpha \quad (3.46)$$

onde  $\alpha$  é uma constante.

Assim, a equação (3.46) pode ser escrita na forma de duas equações diferenciais ordinárias para  $u(x)$  e  $T(t)$ , acopladas pelo parâmetro  $\alpha$ :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \alpha u = 0 \quad (3.47)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - \alpha \frac{E}{\rho} T = 0 \quad (3.48)$$

Se o parâmetro  $\alpha$  for nulo ou positivo obtêm-se soluções incompatíveis com o problema de vibração livre não amortecida. Logo, a solução analítica geral das equações (3.47) e (3.48) tomando o parâmetro  $\alpha$  negativo, ou seja,  $\alpha = -\kappa^2$ , com  $\kappa > 0$ , é dada por:

$$u(x) = B_1 e^{i\kappa x} + B_2 e^{-i\kappa x} = b_1 \sin(\kappa x) + b_2 \cos(\kappa x) \quad (3.49)$$

$$T(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t) \quad (3.50)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \kappa \quad (3.51)$$

sendo que  $i$  é a unidade imaginária,  $\omega$  é a frequência natural de vibração e  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$  são constantes. O parâmetro  $\kappa$  também é conhecido como número de onda da barra (NORTON, 1989).

O número de onda é definido de forma geral pelas relações:

$$\kappa = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_w} \quad (3.52)$$

onde  $c$  corresponde à velocidade de onda e  $\lambda_w$  ao comprimento de onda.

As condições de contorno clássicas para as extremidades esquerda ( $x = 0$ ) e direita ( $x = L$ ) da barra são:

a) Extremidades fixas:

$$\bar{u}(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \bar{u}(L, t) = 0 \quad (3.53)$$



b) Extremidades livres:

$$EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{e} \quad EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.54)$$

sendo possíveis outras combinações das condições (a) e (b).

As condições de contorno das equações (3.53) e (3.54) considerando a separação de variáveis (eq. (3.45)) transformam-se, respectivamente, em:

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(L) = 0 \quad (3.55)$$

$$EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{e} \quad EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.56)$$

Neste problema, as condições de contorno que envolvem um deslocamento prescrito (eq. (3.55)) são denominadas essenciais (ou de Dirichlet) e aquelas que envolvem a derivada primeira do deslocamento prescrita (eq. (3.56)) são denominadas naturais (ou de Neumann) (BECKER; CAREY; ODEN, 1981).

Outras condições de contorno não clássicas, também conhecidas como condições de contorno naturais gerais (BECKER; CAREY; ODEN, 1981), podem ser consideradas, tais como os apoios elásticos formados por molas longitudinais e as massas concentradas. As condições de contorno referentes a molas longitudinais nas extremidades da barra são:

$$k_E \bar{u}(0, t) = EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \text{e} \quad -k_D \bar{u}(L, t) = EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{x=L} \quad (3.57)$$

ou, após a separação de variáveis, utilizando a solução geral temporal (eq. (3.50)):

$$k_E u(0) = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} \quad \text{e} \quad -k_D u(L) = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} \quad (3.58)$$

sendo  $k_E$  e  $k_D$  as rigidezes das molas nas extremidades esquerda e direita da barra, respectivamente.

Para o caso de massas concentradas nas extremidades da barra, as condições de contorno são:

$$m_E \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \text{e} \quad -m_D \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \Big|_{x=L} = EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{x=L} \quad (3.59)$$

ou, após a separação de variáveis utilizando a solução geral temporal (eq. (3.50)):

$$-m_E \omega^2 u(0) = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} \quad \text{e} \quad m_D \omega^2 u(L) = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} \quad (3.60)$$

sendo  $m_E$  e  $m_D$  as massa nas extremidades esquerda e direita da barra, respectivamente.

Aplicando qualquer combinação das condições de contorno do problema à equação (3.49) surge um sistema linear homogêneo de equações cujos coeficientes são funções do parâmetro  $\kappa$ . Para que este sistema admita soluções diferentes da solução trivial, que implicaria em  $u(x) = 0$ , o determinante da matriz de coeficientes do sistema deve ser nulo. Este determinante corresponde a uma função do parâmetro  $\kappa$  conhecida como equação da frequência ou equação característica, cujas raízes permitem determinar as frequências naturais de vibração ( $\omega$ ) para a barra uniforme analisada.

Barras com variação abrupta de seção ou de características mecânicas podem ser analisadas considerando cada trecho uniforme como uma barra isolada com suas condições de contorno e acrescentando-se condições de acoplamento das barras nas extremidades comuns.

Para solução do problemas de vibração livre de barras não uniformes é necessário utilizar transformações de variáveis específicas para cada situação analisada a fim de reduzir as equações governantes do movimento a equações

diferenciais com solução analítica conhecida, ou seja, não há uma solução analítica geral para barras não uniformes. Kumar e Sujith (1997), por exemplo, apresentaram as soluções analíticas para vibração livre axial de barras com variações senoidal e polinomial da área da seção transversal.

Cabe ressaltar que em todas estas situações a solução analítica do problema exige o cálculo do determinante do sistema de condições de contorno e a determinação das raízes da equação da frequência correspondente através de método numérico apropriado.

### 3.2.2 Formulação variacional

De acordo com Carey e Oden (1984b), o modo mais usual para determinar a forma variacional de um problema dependente do tempo é considerar o tempo  $t$  como um parâmetro real e desenvolver uma família de problemas variacionais em  $t$ . Este processo consiste em selecionar funções testes  $w = w(x)$ , independentes de  $t$ , e aplicar o método dos resíduos ponderados. Se o Método dos Elementos Finitos ou métodos similares são utilizados para representar o comportamento espacial da solução, obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias com graus de liberdade sendo funções do parâmetro  $t$ . Esta técnica é chamada formulação semi-discreta do problema.

Logo, aplicando o método dos resíduos ponderados para desenvolver a forma integral da equação (3.43), a solução  $\bar{u} = \bar{u}(x, t)$  deve satisfazer:

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} w \, dx - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) w \, dx = \int_0^L p(x, t) w \, dx \quad (3.61)$$

para funções testes admissíveis  $w = w(x)$  em qualquer tempo  $t \in (0, T_f]$ .

Integrando a equação (3.61) por partes, obtém-se:

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} w \, dx - \left[ wEA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right]_0^L + \int_0^L \left( EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \, dx = \int_0^L p(x,t) w \, dx \quad (3.62)$$

Ainda é necessário introduzir as condições de contorno e iniciais para completar o problema.

Particularizando o problema para o caso de vibração livre de barra reta, onde  $E$  e  $\rho$  são constantes, e  $p(x,t) = 0$ , a equação (3.62) torna-se:

$$\rho \int_0^L A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} w \, dx - \left[ wEA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right]_0^L + E \int_0^L \left( A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \, dx = 0 \quad (3.63)$$

De acordo com Carey e Oden (1984b), em problemas de vibração admitem-se soluções periódicas do tipo:

$$\bar{u}(x,t) = e^{i\omega t} u(x) = \left( \cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t) \right) u(x) \quad (3.64)$$

onde  $\omega$  é a frequência de vibração. Destaca-se que a equação (3.64) corresponde a uma solução analítica particular do problema de vibração obtido nas equações (3.49) e (3.50).

A vibração livre de uma barra uniforme transforma-se então em um problema de autovalores na forma variacional: encontrar um par  $(\lambda, u)$ , com  $u \in H^1(0,L)$  satisfazendo as condições de contorno e  $\lambda \in \mathbf{R}$ , tal que

$$E \int_0^L A \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} \, dx - E \left[ wA \frac{du}{dx} \right]_0^L - \rho \lambda \int_0^L A u w \, dx = 0 \quad (3.65)$$

para funções testes admissíveis  $w \in H^1(0,L)$ , onde  $\lambda = \omega^2$  corresponde ao parâmetro de acoplamento espaço-tempo. A forma variacional do problema de autovalores também pode ser escrita como: encontrar  $(\lambda, u)$ , com  $u \in H^1(0,L)$  satisfazendo as condições de contorno e  $\lambda \in \mathbf{R}$ , tal que

$$B(u, w) = \lambda F(u, w) \quad (3.66)$$

para todas as funções testes admissíveis  $w \in H^1(0, L)$ , onde  $B : H^1 \times H^1 \mapsto \mathbf{R}$  e  $F : H^1 \times H^1 \mapsto \mathbf{R}$  são formas bilineares.

Para qualquer combinação das condições de contorno clássicas (eqs. (3.55) e (3.56)), o segundo termo da equação (3.65) se anula e as formas bilineares são dadas por:

$$B(u, w) = E \int_0^L A \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx \quad (3.67)$$

$$F(u, w) = \rho \int_0^L A u w dx \quad (3.68)$$

Aplicando-se as condições de contorno de apoio elástico (molas longitudinais) (eq. (3.58)), a forma bilinear  $B(u, w)$  torna-se:

$$B(u, w) = E \int_0^L A \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx + k_E u(0)w(0) + k_D u(L)w(L) \quad (3.69)$$

Por outro lado, com a aplicação das condições de contorno de massas concentradas (eq. (3.60)), a forma bilinear  $F(u, w)$  torna-se:

$$F(u, w) = \rho \int_0^L A u w dx + m_E u(0)w(0) + m_D u(L)w(L) \quad (3.70)$$

A aproximação do problema de vibração livre de barras prismáticas utilizando métodos numéricos baseados na forma fraca do problema consiste em reescrever a forma variacional (eq. (3.66)) em um subespaço aproximado  $H^h \subset H^1(0, L)$ . O problema de autovalores aproximado transforma-se em: encontrar  $\lambda_h \in \mathbf{R}$  e  $u_h \in H^h(0, L)$  tal que

$$B(u_h, w_h) = \lambda_h F(u_h, w_h) \quad \forall w_h \in H^h \quad (3.71)$$

A solução aproximada  $u_h(x)$  pode ser escrita, na forma discreta em uma base  $N$ -dimensional, da seguinte forma:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x) \quad (3.72)$$

onde  $\phi_j$  são as funções de base globais do subespaço  $H^h$  e  $u_j$  são os respectivos graus de liberdade. De maneira geral, substituindo a equação (3.72) na equação (3.71) e fazendo  $w_h = \phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , pode-se escrever, para qualquer combinação das condições de contorno clássicas e não clássicas:

$$\sum_{j=1}^N \left( E \int_0^L A \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx + k_E \phi_i(0) \phi_j(0) + k_D \phi_i(L) \phi_j(L) \right) u_j = \lambda_h \sum_{j=1}^N \left( \rho \int_0^L A \phi_i \phi_j dx + m_E \phi_i(0) \phi_j(0) + m_D \phi_i(L) \phi_j(L) \right) u_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.73)$$

ou em forma matricial

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \lambda_h \mathbf{M} \mathbf{u} \quad (3.74)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez e  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa consistente definidas na equação (3.73). A equação (3.74) corresponde a um problema de autovalores generalizado, onde  $\lambda_h$  são os autovalores relacionados às frequências naturais  $\omega_h$  e os vetores  $\mathbf{u}$  são os autovetores correspondentes aos modos de vibração da barra. As frequências naturais aproximadas  $\omega_h$  são obtidas através da relação:

$$\omega_h = \sqrt{\lambda_h} \quad (3.75)$$

### 3.2.3 Soluções aproximadas

Diversos métodos para solução aproximada do problema de vibração livre de barras são encontrados na literatura. No entanto, apenas métodos desenvolvidos a partir da forma fraca apresentada no item anterior são aqui discutidos.

#### 3.2.3.1 Método dos elementos finitos

Depois de discretizar o domínio do problema  $\Omega(0,L)$  em subdomínios  $\Omega_e(0,L_e)$ , chamados elementos, é necessário determinar a contribuição de cada elemento através dos coeficientes da matriz de rigidez elementar  $(k_{ij}^e)$  e dos coeficientes da matriz de massa elementar  $(m_{ij}^e)$ , obtidos por:

$$k_{ij}^e = E \int_{\Omega_e} A \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} dx + k_E \psi_i^e(0) \psi_j^e(0) + k_D \psi_i^e(L_e) \psi_j^e(L_e) \quad (3.76)$$

$$m_{ij}^e = \rho \int_{\Omega_e} A \psi_i^e \psi_j^e dx + m_E \psi_i^e(0) \psi_j^e(0) + m_D \psi_i^e(L_e) \psi_j^e(L_e) \quad (3.77)$$

onde a função de forma local  $\psi_i^e$  é a restrição da função de base  $\phi_i$  no elemento  $\Omega_e$  e  $L_e$  é o comprimento do elemento.

Escolhas de funções locais  $\psi_i^e$  específicas determinam diferentes métodos de solução com propriedades e taxas de convergência próprios. Em geral, de acordo com Reddy (1986), as funções de forma são desenvolvidas para elementos mestre e são então mapeadas para os elementos reais obtidos da malha de elementos finitos. Neste trabalho é utilizado um elemento mestre com domínio  $\Omega_e(0,1)$ .

O Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional utiliza funções de forma polinomiais. Neste método, a precisão da solução aproximada pode ser melhorada utilizando-se técnicas de refinamento tais como os refinamentos  $h$ ,  $p$ ,  $hp$  e adaptativos. Nos próximos tópicos são discutidos os elementos de barra linear e cúbico, além dos refinamentos  $h$  e  $p$  hierárquico do MEF.

### 3.2.3.1.1 Elemento linear

Para o elemento de barra prismática com dois nós (figura 3.3) e com um grau de liberdade por nó, a solução aproximada no domínio do elemento mestre  $\Omega_e(0,1)$  pode ser definida como:

$$u_{MEF}^e(\xi) = \psi_1^e(\xi) u_1 + \psi_2^e(\xi) u_2 \quad (3.78)$$

ou em forma matricial:

$$u_{MEF}^e(\xi) = \mathbf{N}^T \mathbf{q} \quad (3.79)$$

onde

$$\xi = \frac{x}{L_e}, \quad (3.80)$$

$$\mathbf{N}^T = [\psi_1^e \quad \psi_2^e], \quad (3.81)$$

$$\mathbf{q}^T = [u_1 \quad u_2], \quad (3.82)$$

$L_e$  é o comprimento do elemento, e,  $u_1$  e  $u_2$  são os deslocamentos nodais (graus de liberdade nodais).

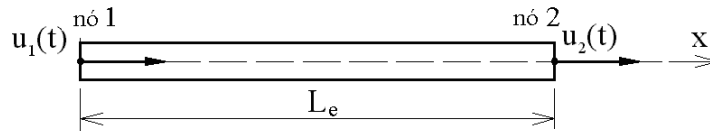


FIGURA 3.3 – ELEMENTO LINEAR DE BARRA

Utilizando polinômios de Lagrange de primeiro grau como funções de forma, obtém-se:

$$\mathbf{N}^T = [1 - \xi \quad \xi] \quad (3.83)$$



e garante-se que a solução pertence ao espaço  $H^1(\Omega_e)$ .

O refinamento  $h$  do MEF linear consiste em aumentar o número destes elementos na malha a fim de melhorar a solução aproximada obtida. Este refinamento  $h$  pode ainda ter sua precisão aumentada pela substituição do elemento linear por outro elemento de ordem superior com maior número de nós, como apresentado a seguir.

### 3.2.3.1.2 Elemento cúbico

Para o elemento de barra prismática com quatro nós (figura 3.4) e com um grau de liberdade por nó, a solução aproximada no domínio do elemento mestre  $\Omega_e(0,1)$  pode ser definida como na equação (3.79) utilizando polinômios de Lagrange de terceiro grau como funções de forma, logo:

$$\mathbf{q}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \quad (3.84)$$

$$\mathbf{N}^T = [\psi_1^e \quad \psi_2^e \quad \psi_3^e \quad \psi_4^e] \quad (3.85)$$

$$\psi_1^e = -\frac{9}{2}\xi^3 + 9\xi^2 - \frac{11}{2}\xi + 1 \quad (3.86)$$

$$\psi_2^e = \frac{27}{2}\xi^3 - \frac{45}{2}\xi^2 + 9\xi \quad (3.87)$$

$$\psi_3^e = -\frac{27}{2}\xi^3 + 18\xi^2 - \frac{9}{2}\xi \quad (3.88)$$

$$\psi_4^e = \frac{9}{2}\xi^3 - \frac{9}{2}\xi^2 + \xi \quad (3.89)$$

onde  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$  são os deslocamentos (graus de liberdade) nodais.

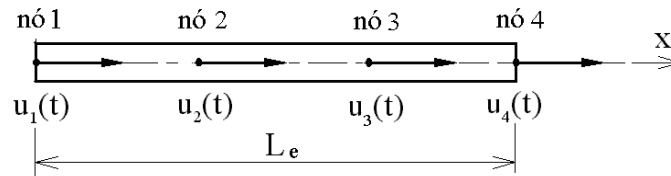


FIGURA 3.4 – ELEMENTO CÚBICO DE BARRA

O refinamento  $h$  do MEF cúbico também consiste em aumentar o número

destes elementos na malha a fim de melhorar a solução aproximada obtida.

### 3.2.3.1.3 Refinamento $p$ hierárquico

O refinamento  $p$  hierárquico do MEF pode ser obtido pela adição sistemática de um novo nó entre cada par de nós existentes do elemento utilizado no nível de refinamento anterior. As funções de forma do nível anterior são mantidas e apenas as funções de forma de ordem superior relativas aos novos nós são acrescentadas.

Utilizando este procedimento, a nova função de forma (polinômio de Lagrange), no domínio do elemento mestre  $\Omega_e(0,1)$ , para um elemento de barra de três nós obtido a partir do elemento linear de dois nós (figura 3.3) no refinamento  $p$  será:

$$\psi_3^e = -4\xi^2 + 4\xi \quad (3.90)$$

Um novo grau de liberdade  $u_3$  surge no modelo, porém não corresponde ao deslocamento nodal do novo nó.

Novas bases locais hierarquicamente superiores são obtidas pela adição de novos nós ao domínio do elemento, desde que sejam mantidas as funções de forma dos níveis anteriores. Este processo se repete a cada novo refinamento.

Também são possíveis outras técnicas para refinar a solução aproximada do MEF convencional, como a utilização de elementos de barra de dois nós com quatro graus de liberdade (PETYT, 1990), sendo dois deslocamentos nodais e as derivadas primeiras destes deslocamentos nodais. Neste caso são utilizadas as funções de forma polinomiais cúbicas correspondentes ao elemento finito de viga. Este elemento cúbico permite satisfazer tanto as condições de contorno essenciais quanto as naturais porém, para barras com mudanças abruptas de seção ou de propriedades mecânicas é necessário desacoplar estes novos graus de liberdade no nó comum aos elementos com diferentes propriedades.

### 3.2.3.2 Métodos enriquecidos

Diversos métodos encontrados na literatura têm como característica principal o enriquecimento do espaço de funções de forma do MEF convencional pela adição de outras funções não polinomiais, aqui denominadas funções enriquecedoras. Neste trabalho, tais métodos são denominados métodos enriquecidos.

A solução aproximada para os métodos enriquecidos no domínio do elemento mestre de uma barra é definida por:

$$u_h^e = u_{MEF}^e + u_{ENRIQ}^e \quad (3.91)$$

ou na forma matricial:

$$u_h^e = \mathbf{N}^T \mathbf{q} + \mathbf{\Theta}^T \mathbf{c} \quad (3.92)$$

onde  $u_{MEF}^e$  é o campo de deslocamentos do MEF baseado nos graus de liberdade nodais,  $u_{ENRIQ}^e$  é o campo de deslocamentos enriquecido baseado em graus de liberdade de campo,  $\mathbf{q}$  corresponde ao vetor de graus de liberdade nodais do elemento de 2 nós do MEF convencional (eq.(3.82)), o vetor  $\mathbf{N}$  contém as funções de forma lineares do MEF obtidas na equação (3.83),  $\mathbf{\Theta}$  é o vetor de funções enriquecedoras e  $\mathbf{c}$  é o vetor de deslocamentos (graus de liberdade) de campo. Os vetores  $\mathbf{\Theta}$  e  $\mathbf{c}$  podem ser definidos por:

$$\mathbf{\Theta}^T(\xi) = [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_r \quad \dots \quad F_n] \quad (3.93)$$

$$\mathbf{c}^T = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \quad (3.94)$$

onde  $F_r$  são as funções enriquecedoras e  $c_i$  são os graus de liberdade de campo. Os novos graus de liberdade relacionados às funções de forma enriquecedoras não têm significado físico direto.

### 3.2.3.2.1 Método dos modos admissíveis

O Método dos Modos Admissíveis (MMA) proposto por Engels (1992) utiliza como funções enriquecedoras  $F_r$  a solução analítica do problema de vibração livre de uma barra com os deslocamentos nodais restritos, normalizada pela massa, na forma:

$$F_r = \sqrt{\frac{2}{\rho AL}} \sin(r\pi\xi) \quad , \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.95)$$

### 3.2.3.2.2 Método composto

O Método Composto (MC) proposto por Zeng (1998a) utiliza funções enriquecedoras que se diferem das funções propostas por Engels (1992) apenas pela não normalização pela massa, ou seja:

$$F_r = \sin(r\pi\xi) \quad , \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.96)$$

Os novos graus de liberdade relacionados às funções enriquecedoras foram denominados graus de liberdade  $c$  por Zeng (1998a). O enriquecimento proposto pelo MC produz modelos hierárquicos e melhores resultados que aqueles obtidos pelo refinamento  $h$  do MEF (ARNDT; MACHADO; HECKE, 2002a, 2003). O refinamento hierárquico obtido pelo aumento do número das funções analíticas na solução aproximada foi denominado refinamento  $c$  por Zeng (1998a, 1998b).

As funções de forma propostas por Zeng (1998a) são ainda idênticas às funções enriquecedoras do elemento de barra de outro método enriquecido proposto por Leung e Chan (1998), denominado Método dos Elementos Finitos  $p$ -Fourier.

Cabe ressaltar que nestes métodos enriquecidos as novas funções de forma se anulam nos nós do elemento. Esta característica permite a utilização dos mesmos procedimentos do MEF convencional para montagem das matrizes de rigidez e

massa, e imposição das condições de contorno apenas nos graus de liberdade nodais. Outra vantagem é a obtenção de refinamentos naturalmente hierárquicos.

### 3.3 EIXO RETO COM VIBRAÇÃO TORCIONAL

A vibração livre torcional de um eixo reto (figura 3.5) ocorre em torno do eixo central longitudinal da barra.

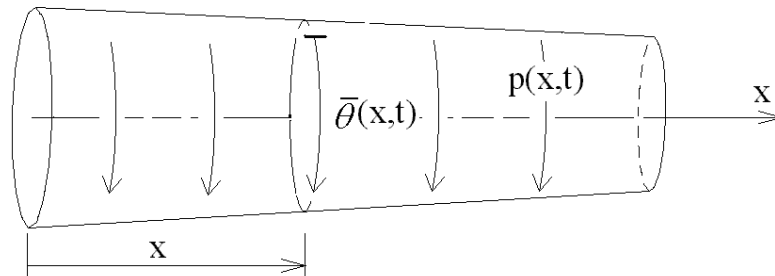


FIGURA 3.5 – EIXO RETO COM DEFORMAÇÃO ANGULAR

O problema de vibração torcional de um eixo circular uniforme estacionário consiste em encontrar o deslocamento angular  $\bar{\theta}$  que satisfaz:

$$\rho I_p \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( G I_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right) = p(x,t) \quad (3.97)$$

onde  $I_p$  é o momento polar de inércia da seção transversal do eixo,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $\rho$  é a massa específica,  $p$  é o momento torsor aplicado por unidade de comprimento e  $t$  é o tempo. Particularizando o problema para o caso de vibração torcional livre de eixo circular reto uniforme, onde  $G$ ,  $I_p$  e  $\rho$  são constantes e  $p(x,t) = 0$ , a equação (3.97) reduz-se a:

$$\rho I_p \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial t^2} - G I_p \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.98)$$

Segundo Inman (1996), admitindo-se que o centro de massa e o centro de

rotação coincidem, e que as vibrações laterais e torcionais são desacopladas, a equação (3.98) pode ser empregada para aproximar o movimento de vibração torcional livre de eixos uniformes com seções transversais não circulares utilizando-se a constante torcional  $\gamma_T$ , da seguinte forma:

$$\rho I_p \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial t^2} - G \gamma_T \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.99)$$

A constante torcional pode ser definida como o momento necessário para produzir uma rotação torcional de 1 rad, em um comprimento unitário do eixo, dividido pelo módulo de elasticidade transversal. Os valores desta constante para diversas seções transversais são encontrados na literatura.

A solução  $\bar{\theta} = \bar{\theta}(x, t)$  deve satisfazer as condições iniciais e de contorno definidos no problema.

### 3.3.1 Solução analítica

Observa-se que o problema de vibração torcional livre de eixos circulares (eq. (3.98)) é matematicamente idêntico ao problema de vibração axial livre de barras retas (eq. (3.44)). Logo, aplicando-se a técnica da separação das variáveis, a solução geral desta equação diferencial é dada por:

$$\bar{\theta}(x, t) = \theta(x) T(t) \quad (3.100)$$

$$\theta(x) = b_1 \sin(\kappa x) + b_2 \cos(\kappa x) \quad (3.101)$$

$$T(t) = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t) \quad (3.102)$$

$$\omega = \kappa \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (3.103)$$

sendo que  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são constantes.

As condições de contorno clássicas (extremidade fixa ou livre) e não clássicas (molas torcionais e massas concentradas) são análogas às apresentadas

nas equações (3.53) a (3.60). Da mesma forma, aplicando-se as condições de contorno do problema à equação (3.101) surge a equação da frequência, que solucionada fornece as frequências naturais de vibração ( $\omega$ ) para eixos circulares uniformes.

### 3.3.2 Formulação variacional

Assim como na vibração axial livre, a forma variacional do problema de autovalores associado à vibração torcional livre de eixos circulares uniformes pode ser escrita como: encontrar  $(\lambda, \theta)$ , com  $\theta \in H^1(0, L)$ , satisfazendo as condições de contorno, e  $\lambda \in \mathbf{R}$ , tal que

$$B(\theta, w) = \lambda F(\theta, w) \quad (3.104)$$

para todas as funções testes admissíveis  $w \in H^1(0, L)$ , onde  $B : H^1 \times H^1 \mapsto \mathbf{R}$  e  $F : H^1 \times H^1 \mapsto \mathbf{R}$  são formas bilineares.

Para as condições de contorno clássicas, as formas bilineares são obtidas pelas expressões:

$$B(\theta, w) = GI_p \int_0^L \frac{d\theta}{dx} \frac{dw}{dx} dx \quad (3.105)$$

$$F(\theta, w) = \rho I_p \int_0^L \theta w dx \quad (3.106)$$

De maneira análoga, para as condições de contorno não clássicas, estas formas bilineares são substituídas, respectivamente por:

$$B(\theta, w) = GI_p \int_0^L \frac{d\theta}{dx} \frac{dw}{dx} dx + k_E \theta(0)w(0) + k_D \theta(L)w(L) \quad (3.107)$$

$$F(\theta, w) = \rho I_p \int_0^L \theta w dx + I_{0E} \theta(0)w(0) + I_{0D} \theta(L)w(L) \quad (3.108)$$

onde  $k_E$  e  $k_D$  são as rigidezes torcionais das molas e,  $I_{0E}$  e  $I_{0D}$  são as inércias rotacionais das massas nas extremidades esquerda e direita do eixo, respectivamente.

### 3.3.3 Soluções aproximadas

Considerando que os problemas de vibração livre de barras e de eixos são matematicamente idênticos, conclui-se que as mesmas formulações do MEF e dos métodos enriquecidos para barras podem ser aplicadas aos eixos em vibração torcional.

## 3.4 VIGA DE EULER-BERNOULLI COM VIBRAÇÃO TRANSVERSAL

A viga de Euler-Bernoulli corresponde à viga reta com deformação lateral, conforme figura 3.6, para a qual se consideram as seguintes hipóteses:

- (a) Existe uma linha neutra onde não ocorre tração nem compressão;
- (b) As seções que são planas e perpendiculares ao eixo longitudinal antes da deformação permanecem planas e indeformáveis no plano;
- (c) O material é elástico, linear e homogêneo;
- (d) Tensões normais  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são muito pequenas quando comparadas com a tensão axial  $\sigma_x$  e, por esta razão, são desprezadas;
- (e) A inércia rotacional da viga é desconsiderada.

O problema da vibração lateral da viga consiste em encontrar o deslocamento transversal  $\bar{v}$  que satisfaz:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (3.109)$$

onde  $A = A(x)$  é a área da seção transversal,  $I = I(x)$  é o momento de inércia em relação ao eixo de flexão,  $E = E(x)$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $\rho$  é a



massa específica,  $p$  é a força transversal aplicada por unidade de comprimento e  $t$  é o tempo. A solução  $\bar{v} = \bar{v}(x, t)$  deve satisfazer as condições iniciais e de contorno definidas no problema.

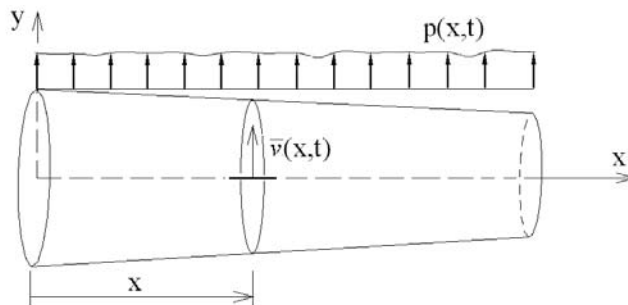


FIGURA 3.6 – VIGA RETA COM DEFORMAÇÃO LATERAL

### 3.4.1 Solução analítica

Particularizando o problema para o caso de vibração livre de viga prismática, onde  $E$ ,  $I$ ,  $A$  e  $\rho$  são constantes e  $p(x, t) = 0$ , a equação (3.109) reduz-se a:

$$EI \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.110)$$

Utilizando novamente o método da separação das variáveis, considera-se:

$$\bar{v}(x, t) = v(x) T(t) \quad (3.111)$$

Substituindo a equação (3.111) na equação (3.110), obtém-se:

$$-\frac{d^2 T / dt^2}{T} = \frac{EI}{\rho A} \frac{d^4 v / dx^4}{v} = \alpha \quad (3.112)$$

onde  $\alpha$  é uma constante.

A equação (3.112) pode ser escrita na forma de duas equações diferenciais ordinárias para  $v(x)$  e  $T(t)$ , acopladas pelo parâmetro  $\alpha$ :

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \alpha \frac{\rho A}{EI} v = 0 \quad (3.113)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \alpha T = 0 \quad (3.114)$$

Assim como no problema de vibração de barras, se o parâmetro  $\alpha$  for nulo ou negativo obtém-se soluções incompatíveis com o problema de vibração livre não amortecida. Logo, a solução das equações (3.113) e (3.114) tomando o parâmetro  $\alpha$  positivo, ou seja,  $\alpha \frac{\rho A}{EI} = \kappa^4$  com  $\kappa > 0$ , é classicamente dada por:

$$v(x) = b_1 \sin(\kappa x) + b_2 \cos(\kappa x) + b_3 \sinh(\kappa x) + b_4 \cosh(\kappa x) \quad (3.115)$$

$$T(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t) \quad (3.116)$$

$$\kappa^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \quad (3.117)$$

sendo  $i$  a unidade imaginária e,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  e  $b_4$  constantes. O parâmetro  $\kappa$  também é conhecido como número de onda de flexão ou da viga (NORTON, 1989). Aplicando as condições de contorno do problema à equação (3.115) surge a equação da frequência que solucionada fornece as frequências naturais de vibração ( $\omega$ ) da viga.

Ao analisar a equação (3.115) verifica-se que os termos hiperbólicos resultam em valores com magnitude cada vez mais elevada à medida que aumenta o valor do parâmetro  $\kappa$ . Gartner e Olgac (1982) propuseram então a utilização de uma equação equivalente à equação (3.115), na forma:

$$v(\xi) = b_1 \sin(\beta_r \xi) + b_2 \cos(\beta_r \xi) + b_3 e^{-\beta_r \xi} + b_4 e^{-\beta_r (1-\xi)} \quad (3.118)$$

$$\beta_r^4 = \omega^2 \frac{\rho A L^4}{EI} = \kappa^4 L^4 \quad (3.119)$$

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (3.120)$$

onde  $L$  é o comprimento da viga. A solução espacial da equação diferencial nesta forma apresenta propriedades numéricas superiores às da forma clássica (equação (3.115)), pois os valores numéricos das funções base estão todos no intervalo de -1 a +1 para o domínio espacial  $0 \leq \xi \leq 1$ . Como todos os termos têm magnitude de ordem um, mesmo para altos modos de vibração, os erros de arredondamento associados às funções hiperbólicas com argumentos elevados são evitados. Esta forma alternativa da solução espacial geral é adotada nos trabalhos de Leung (1988 e 1990) e, Ganesan e Engels (1991).

No mesmo trabalho, Gartner e Olgac (1982) apresentam os dez primeiros autovalores  $\beta_r$  e os coeficientes  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  e  $b_4$  da equação (3.118) para as dez possibilidades de combinação das condições de contorno clássicas nas extremidades da viga: engastamento, articulado fixo, engaste móvel e extremidade livre. Cabe salientar que os coeficientes para a viga com uma extremidade articulada fixa e a outra livre apresentados por Gartner e Olgac (1982), e Leung (1988) estão incorretos e foram posteriormente corrigidos por Leung (1990).

As condições de contorno clássicas para as extremidades esquerda ( $x = 0$ ) e direita ( $x = L$ ) da viga, respectivamente, são:

a) Extremidade engastada:

$$\bar{v}(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.121)$$

$$\bar{v}(L,t) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.122)$$

b) Extremidade simplesmente apoiada:

$$\bar{v}(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad M(0,t) = \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \bigg|_{x=0} = 0 \quad (3.123)$$

$$\bar{v}(L,t) = 0 \quad \text{e} \quad M(L,t) = \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \bigg|_{x=L} = 0 \quad (3.124)$$

c) Extremidade tipo engaste móvel:

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{e} \quad Q(0,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \bigg|_{x=0} = 0 \quad (3.125)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad \text{e} \quad Q(L,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \bigg|_{x=L} = 0 \quad (3.126)$$

d) Extremidade livre:

$$M(0,t) = \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \bigg|_{x=0} = 0 \quad \text{e} \quad Q(0,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \bigg|_{x=0} = 0 \quad (3.127)$$

$$M(L,t) = \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \bigg|_{x=L} = 0 \quad \text{e} \quad Q(L,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \bigg|_{x=L} = 0 \quad (3.128)$$

onde  $M$  é o momento fletor e  $Q$  é o esforço cortante na extremidade considerada. Obviamente, estas condições de contorno podem ser combinadas gerando vigas com condições de contorno na extremidade esquerda diferentes da extremidade direita.

Neste problema, as condições de contorno que envolvem deslocamento ou rotação prescritos são denominadas essenciais (ou de Dirichlet) e aquelas que envolvem derivada segunda ou terceira do deslocamento prescritas são denominadas naturais (ou de Neumann) (BECKER; CAREY; ODEN, 1981).

Outras condições de contorno não clássicas (naturais gerais) podem ser consideradas, como os apoios elásticos formados por molas transversais e rotacionais, e as massas concentradas. As condições de contorno referentes à molas transversais e rotacionais nas extremidades são:

$$-k_{TE} \bar{v}(0,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \bigg|_{x=0} \quad \text{e} \quad k_{RE} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bigg|_{x=0} = EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \bigg|_{x=0} \quad (3.129)$$

$$k_{TD} \bar{v}(L, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} \quad \text{e} \quad -k_{RD} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \Big|_{x=L} = EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \Big|_{x=L} \quad (3.130)$$

sendo  $k_{TE}$  e  $k_{TD}$  as rigidezes das molas transversais (translacionais) e,  $k_{RE}$  e  $k_{RD}$  as rigidezes das molas rotacionais nas extremidades esquerda e direita da viga, respectivamente.

Para o caso de massas concentradas nas extremidades da viga, as condições de contorno são:

$$-m_E \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0} \quad \text{e} \quad I_{mE} \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=0} = EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \Big|_{x=0} \quad (3.131)$$

$$m_D \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \Big|_{x=L} = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} \quad \text{e} \quad -I_{mD} \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} = EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \Big|_{x=L} \quad (3.132)$$

ou após a separação de variáveis, utilizando a solução geral temporal (eq. (3.116)):

$$m_E \omega^2 v(0) = \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \Big|_{x=0} \quad \text{e} \quad -I_{mE} \omega^2 \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=0} \quad (3.133)$$

$$-m_D \omega^2 v(L) = \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \Big|_{x=L} \quad \text{e} \quad I_{mD} \omega^2 \frac{dv}{dx} \Big|_{x=L} = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=L} \quad (3.134)$$

sendo  $m_E$  e  $m_D$  as massas concentradas e,  $I_{mD}$  e  $I_{mE}$  os momentos de inércia de massa nas extremidades esquerda e direita da viga, respectivamente.

### 3.4.2 Formulação variacional

Aplicando o método dos resíduos ponderados para desenvolver a forma integral da equação (3.109), a solução  $\bar{v} = \bar{v}(x, t)$  deve satisfazer:

$$\int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) w dx + \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} w dx = \int_0^L p(x, t) w dx \quad (3.135)$$

para funções testes admissíveis  $w = w(x)$  em qualquer tempo  $t \in (0, T_f]$ .

Integrando a equação (3.135) por partes duas vezes, obtém-se:

$$w \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L - \frac{\partial w}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L + \int_0^L \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} w dx = \int_0^L p w dx \quad (3.136)$$

Particularizando o problema para o caso de vibração livre de viga reta de Euler-Bernoulli, onde  $E$  e  $\rho$  são constantes, e  $p(x, t) = 0$ , a equação (3.136) torna-se:

$$w E \frac{\partial}{\partial x} \left( I \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L - \frac{\partial w}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L + E \int_0^L \left( I \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \rho \int_0^L A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} w dx = 0 \quad (3.137)$$

Em problemas de vibração, admitem-se soluções periódicas do tipo:

$$\bar{v}(x, t) = e^{i\omega t} v(x) = (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) v(x) \quad (3.138)$$

onde  $\omega$  é a frequência natural de vibração. A equação (3.138) corresponde a uma solução analítica particular do problema de vibração obtido nas equações (3.111) e (3.116).

A vibração livre de uma viga reta transforma-se então em um problema de autovalores na forma variacional: encontrar um par  $(\lambda, v)$ , com  $v \in H^2(0, L)$  satisfazendo as condições de contorno, e  $\lambda \in \mathbf{R}$ , tal que:

$$w E \frac{d}{dx} \left( I \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \Big|_0^L - \frac{dw}{dx} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \Big|_0^L + E \int_0^L \left( I \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \lambda \rho \int_0^L A v w dx = 0 \quad (3.139)$$

para funções testes admissíveis  $w \in H^2(0, L)$ , onde  $\lambda = \omega^2$  corresponde ao parâmetro de acoplamento espaço-tempo. A equação (3.139) também pode ser descrita na forma:

$$B(v, w) = \lambda F(v, w) \quad (3.140)$$

onde  $B : H^2 \times H^2 \mapsto \mathbf{R}$  e  $F : H^2 \times H^2 \mapsto \mathbf{R}$  são formas bilineares.

Para qualquer combinação das condições de contorno clássicas (eqs. (3.121) a (3.128), as formas bilineares tomam a forma:

$$B(v, w) = E \int_0^L I \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx \quad (3.141)$$

$$F(v, w) = \rho \int_0^L A v w dx \quad (3.142)$$

Aplicando-se as condições de contorno de apoio elástico (molas) (eqs. (3.129) e (3.130)), a forma bilinear  $B(v, w)$  torna-se:

$$\begin{aligned} B(v, w) = & E \int_0^L I \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx + k_{TE} v(0) w(0) + k_{TD} v(L) w(L) + k_{RE} \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} + \\ & + k_{RD} \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=L} \end{aligned} \quad (3.143)$$

Por outro lado, com a aplicação das condições de contorno de massas concentradas (eqs. (3.133) e (3.134)), a forma bilinear  $F(v, w)$  torna-se:

$$\begin{aligned} F(v, w) = & \rho \int_0^L A v w dx + m_E v(0) w(0) + m_D v(L) w(L) + I_{mE} \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} + \\ & + I_{mD} \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=L} \end{aligned} \quad (3.144)$$

A aproximação do problema de vibração livre de vigas retas por elementos finitos consiste em reescrever a forma variacional do problema (eq. (3.140)) em um subespaço aproximado  $H^h \subset H^2(0,L)$ . O problema de autovalores aproximado transforma-se em: encontrar  $\lambda_h \in \mathbf{R}$  e  $v_h \in H^h(0,L)$  tal que

$$B(v_h, w_h) = \lambda_h F(v_h, w_h) \quad \forall w_h \in H^h \quad (3.145)$$

Novamente, a solução aproximada  $v_h(x)$  pode ser escrita, na forma discreta em uma base  $N$ -dimensional, na seguinte forma:

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^N v_j \phi_j(x) \quad (3.146)$$

onde  $\phi_j$  são funções de base globais do subespaço  $H^h$  e  $v_j$  são os respectivos graus de liberdade. Substituindo a equação (3.146) na equação (3.145) e fazendo  $w_h = \phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , obtém-se, para qualquer combinação de condições de contorno clássicas e não clássicas:

$$\sum_{j=1}^N \left( E \int_0^L I \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} dx + k_{TE} \phi_i(0) \phi_j(0) + k_{TD} \phi_i(L) \phi_j(L) + k_{RE} \frac{d\phi_i}{dx} \Big|_{x=0} \frac{d\phi_j}{dx} \Big|_{x=0} + k_{RD} \frac{d\phi_i}{dx} \Big|_{x=L} \frac{d\phi_j}{dx} \Big|_{x=L} \right) v_j = \lambda_h \sum_{j=1}^N \left( \rho \int_0^L A \phi_i \phi_j dx + m_E \phi_i(0) \phi_j(0) + m_D \phi_i(L) \phi_j(L) + I_{mE} \frac{d\phi_i}{dx} \Big|_{x=0} \frac{d\phi_j}{dx} \Big|_{x=0} + I_{mD} \frac{d\phi_i}{dx} \Big|_{x=L} \frac{d\phi_j}{dx} \Big|_{x=L} \right) v_j \quad (3.147)$$

,  $i = 1, 2, \dots, N$

que corresponde a um problema de autovalores generalizado com a mesma forma matricial (matrizes de massa e rigidez) do problema de vibração axial de barras (eq. (3.74)).



### 3.4.3 Soluções aproximadas

#### 3.4.3.1 Método dos elementos finitos

No Método dos Elementos Finitos, a contribuição de cada elemento através dos coeficientes da matriz de rigidez elementar ( $k_{ij}^e$ ) e dos coeficientes da matriz de massa elementar ( $m_{ij}^e$ ), são agora obtidos por:

$$k_{ij}^e = E \int_{\Omega_e} I \frac{\partial^2 \psi_i^e}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_j^e}{\partial x^2} dx + k_{TE} \psi_i^e(0) \psi_j^e(0) + k_{TD} \psi_i^e(L_e) \psi_j^e(L_e) +$$

$$+ k_{RE} \frac{d\psi_i^e}{dx} \bigg|_{x=0} \frac{d\psi_j^e}{dx} \bigg|_{x=0} + k_{RD} \frac{d\psi_i^e}{dx} \bigg|_{x=L_e} \frac{d\psi_j^e}{dx} \bigg|_{x=L_e} \quad (3.148)$$

$$m_{ij}^e = \rho \int_{\Omega_e} A \psi_i^e \psi_j^e dx + m_E \psi_i^e(0) \psi_j^e(0) + m_D \psi_i^e(L_e) \psi_j^e(L_e) + I_{mE} \frac{d\psi_i^e}{dx} \bigg|_{x=0} \frac{d\psi_j^e}{dx} \bigg|_{x=0} +$$

$$+ I_{mD} \frac{d\psi_i^e}{dx} \bigg|_{x=L_e} \frac{d\psi_j^e}{dx} \bigg|_{x=L_e} \quad (3.149)$$

onde a função de forma local  $\psi_i^e$  é a restrição da função de base  $\phi_i$  no elemento  $\Omega_e$  e  $L_e$  é o comprimento do elemento.

Utilizando o MEF convencional para o elemento de viga prismática (figura 3.7) com dois graus de liberdade por nó, a solução aproximada no domínio do elemento mestre  $\Omega_e(0,1)$  pode ser definida como:

$$v_{MEF}^e(\xi) = \psi_1^e(\xi) v_1 + \psi_2^e(\xi) \theta_1 + \psi_3^e(\xi) v_2 + \psi_4^e(\xi) \theta_2 \quad (3.150)$$

ou em forma matricial:

$$v_{MEF}^e(\xi) = \mathbf{N}^T \mathbf{q} \quad (3.151)$$

onde

$$\xi = \frac{x}{L_e} \quad (3.152)$$

$$\mathbf{N}^T = [\psi_1^e \quad \psi_2^e \quad \psi_3^e \quad \psi_4^e] \quad (3.153)$$

$$\mathbf{q}^T = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2] \quad (3.154)$$

$L_e$  é o comprimento do elemento,  $v_1$  e  $v_2$  são os deslocamentos nodais e,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações nodais (graus de liberdade nodais).

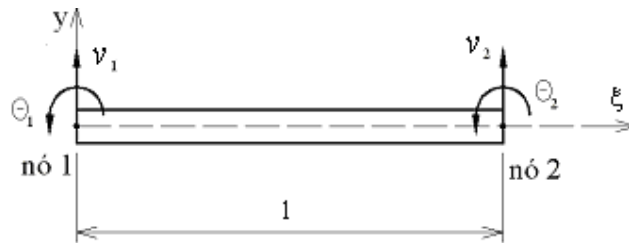


FIGURA 3.7 – ELEMENTO DE VIGA

Utilizando como funções de forma locais os polinômios de Hermite obtidos através do método descrito por Augarde (1998), a partir dos polinômios de Lagrange, obtém-se:

$$\mathbf{N}^T = \left[ 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad L_e(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad L_e(\xi^3 - \xi^2) \right] \quad (3.155)$$

e garante-se que a solução pertence ao espaço  $H^2$ .

#### 3.4.3.1.1 Refinamento $p$ hierárquico

Da mesma forma como para o elemento de barra, o refinamento  $p$  hierárquico do MEF pode ser obtido pela adição sistemática de um novo nó entre cada par de nós existentes no elemento utilizado no nível de refinamento anterior. As funções de forma do nível anterior são mantidas e apenas as funções de forma de ordem superior relativas aos novos nós são acrescentadas.

Utilizando este procedimento, as novas funções de forma de Hermite para

um elemento de viga de três nós obtido a partir do elemento de viga de dois nós (figura 3.7) no refinamento  $p$  são:

$$\psi_5^e = 16\xi^4 - 32\xi^3 + 16\xi^2 \quad (3.156)$$

$$\psi_6^e = L_e (16\xi^5 - 40\xi^4 + 32\xi^3 - 8\xi^2) \quad (3.157)$$

Dois novos graus de liberdade  $u_3$  e  $\theta_3$  surgem no modelo, porém não correspondem ao deslocamento e à rotação do novo nó.

Novas bases locais hierarquicamente superiores são obtidas pela adição de novos nós ao domínio do elemento desde que sejam mantidas as funções de forma dos níveis anteriores.

#### 3.4.3.2 Método dos elementos finitos spline

No Método dos Elementos Finitos Spline (MEFS), apresentado por Leung e Au (1990), o elemento de viga é dividido em  $m$  trechos iguais, sendo  $m$  um número inteiro positivo. A solução aproximada para o MEFS no domínio do elemento de viga tem a forma:

$$v_h^e = \sum_{i=-1}^{m+1} \alpha_i \psi_i \quad (3.158)$$

onde cada função de forma  $\psi_i$  é uma função  $B_3$ -spline não nula sobre quatro trechos consecutivos de mesma dimensão  $h$  (figura 3.8), tendo o nó  $x = x_i$  como centro, e definida por:

$$\psi_i = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} 0 & x < x_{i-2} \\ (x - x_{i-2})^3 & x_{i-2} \leq x \leq x_{i-1} \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ (x_{i+2} - x)^3 & x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ 0 & x_{i+2} < x \end{cases} \quad (3.159)$$

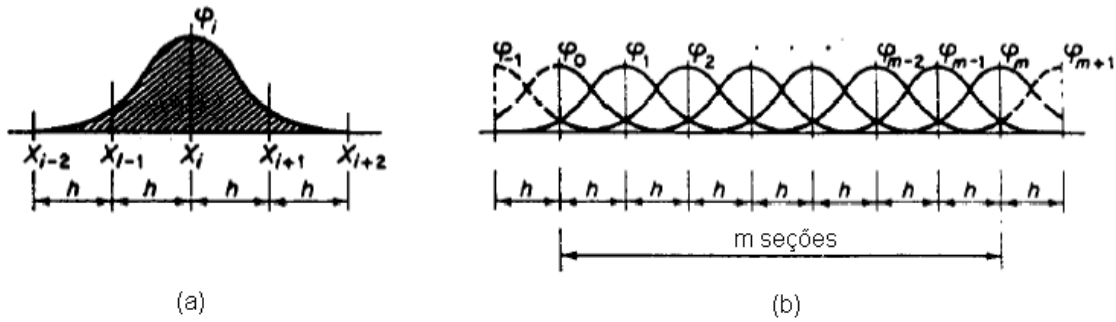


FIGURA 3.8 – (a) FUNÇÃO B<sub>3</sub>-SPLINE TÍPICA; (b) BASE DE FUNÇÕES B<sub>3</sub>-SPLINE  
 FONTE: LEUNG E AU (1990)

Logo, existem  $m + 3$  parâmetros  $\alpha_i$  para definir o campo de deslocamentos, sendo apenas  $m - 1$  parâmetros associados a pontos interiores ao elemento. Leung e Au (1990) desenvolveram uma transformação, baseada nas expressões que descrevem os graus de liberdade nodais em função dos parâmetros  $\alpha_i$ , para modificar os parâmetros spline em coordenadas físicas de modo a permitir a imposição das condições de contorno pelos procedimentos do MEF convencional.

#### 3.4.3.3 Métodos enriquecidos

A solução aproximada para os métodos enriquecidos no domínio do elemento mestre de uma viga é definida por:

$$v_h^e = v_{MEF}^e + v_{ENRIQ}^e \quad (3.160)$$

ou na forma matricial:

$$v_h^e = \mathbf{N}^T \mathbf{q} + \mathbf{\Theta}^T \mathbf{c} \quad (3.161)$$

onde  $v_{MEF}^e$  é o campo de deslocamentos do MEF baseado nos graus de liberdade nodais,  $v_{ENRIQ}^e$  é o campo de deslocamentos enriquecido baseado em graus de liberdade de campo,  $\mathbf{q}$  corresponde ao vetor de graus de liberdade nodais do

elemento de dois nós do MEF convencional (eq.(3.154)), o vetor  $\mathbf{N}$  contém as funções de forma do MEF obtidas na equação (3.155),  $\mathbf{\Phi}$  é o vetor de funções enriquecedoras e  $\mathbf{c}$  é o vetor de deslocamentos (graus de liberdade) de campo. Os vetores  $\mathbf{\Phi}$  e  $\mathbf{c}$  podem ser definidos por:

$$\mathbf{\Phi}^T(\xi) = [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_r \quad \dots \quad F_n] \quad (3.162)$$

$$\mathbf{c}^T = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \quad (3.163)$$

onde  $F_r$  são as funções enriquecedoras e  $c_i$  são os graus de liberdade de campo.

#### 3.4.3.3.1 Método dos modos admissíveis

O Método dos Modos Admissíveis (MMA), desenvolvido por Engels (1992) e, Ganesan e Engels (1992), utiliza modos admissíveis restritos na interface como funções enriquecedoras. Diferentes modelos hierárquicos podem ser obtidos dependendo dos modos admissíveis escolhidos.

Engels (1992) utilizou os modos analíticos normais de vibração livre de uma viga de Euler-Bernoulli bi-engastada, em sua forma clássica e normalizados em relação à massa, como modos admissíveis restritos na interface, obtendo então as funções enriquecedoras:

$$F_r = \frac{1}{\sqrt{\rho A L \alpha_r^2}} \{ \sinh(\lambda_r \xi) - \sin(\lambda_r \xi) - \alpha_r [\cosh(\lambda_r \xi) - \cos(\lambda_r \xi)] \} \quad , \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.164)$$

$$\alpha_r = \frac{\sinh(\lambda_r) - \sin(\lambda_r)}{\cosh(\lambda_r) - \cos(\lambda_r)} \quad (3.165)$$

onde  $\lambda_r$  são autovalores associados à solução da viga bi-engastada obtidos pela solução da equação característica

$$\cos(\lambda_r) \cosh(\lambda_r) - 1 = 0 \quad (3.166)$$

A fim de evitar os erros de arredondamento associados às funções hiperbólicas com argumentos elevados, Ganesan e Engels (1992) utilizaram os modos normais analíticos da viga bi-engastada na forma alternativa proposta por Gartner e Olgac (1982), obtendo as seguintes funções de forma equivalentes dos modos admissíveis:

$$F_r = \frac{1}{\sqrt{\rho AL}} \left[ \cos(\lambda_r \xi) - \frac{1 + (-1)^r e^{-\lambda_r}}{1 - (-1)^r e^{-\lambda_r}} \operatorname{sen}(\lambda_r \xi) - \frac{e^{-\lambda_r \xi} - (-1)^r e^{-\lambda_r(1-\xi)}}{1 - (-1)^r e^{-\lambda_r}} \right], \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.167)$$

onde  $\lambda_r$  são autovalores associados à solução da viga bi-engastada que correspondem às raízes da equação característica equivalente:

$$\cos(\lambda_r) - \frac{2e^{-\lambda_r}}{1 + e^{-2\lambda_r}} = 0 \quad (3.168)$$

Ganesan e Engels (1992) também propuseram a utilização de funções trigonométricas como funções de forma dos modos admissíveis restritos na interface, na forma:

$$F_r = \cos[(r-1)\pi\xi] - \cos[(r+1)\pi\xi], \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.169)$$

Estas funções são admissíveis, uma vez que tanto as funções  $F_r$  quanto suas derivadas primeiras se anulam no contorno do domínio do elemento. A convergência desta forma do MMA mostrou-se numericamente muito estável e com taxa de convergência inferior à taxa obtida pelo MMA com modos normais, mas superior à obtida pelo refinamento  $h$  do MEF (GANESAN; ENGELS, 1992).

Os novos graus de liberdade relacionados às funções de forma dos modos admissíveis não têm significado físico direto.

### 3.4.3.3.2 Método composto

O Método Composto (MC), proposto por Zeng (1998b), utiliza funções enriquecedoras dadas por:

$$F_r = \sin(\lambda_r \xi) - \sinh(\lambda_r \xi) - \frac{\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r}{\cos \lambda_r - \cosh \lambda_r} [\cos(\lambda_r \xi) - \cosh(\lambda_r \xi)] \quad , \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.170)$$

que correspondem à solução do problema de vibração livre de uma viga de Euler-Bernoulli bi-engastada e  $\lambda_r$  são autovalores obtidos pela solução da equação característica (3.166).

Observa-se que o MC proposto por Zeng (1998b) corresponde ao MMA proposto por Engels (1992) e, Ganesan e Engels (1992) utilizando como modos admissíveis os modos normais de vibração da viga bi-engastada sem a normalização em relação à massa.

Os novos graus de liberdade relacionados às funções de forma enriquecidas não têm significado físico direto e foram denominados graus de liberdade  $c$  por Zeng (1998b).

### 3.4.3.3.3 Método dos elementos finitos $p$ -Fourier

O Método dos Elementos Finitos  $p$ -Fourier (MEF Fourier), proposto por Leung e Chan (1998), utiliza funções enriquecedoras baseadas nas séries de Fourier e definidas por:

$$F_r = (\xi - \xi^2) \sin(r\pi\xi) \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.171)$$

Verifica-se que, assim como para os modos admissíveis restritos na interface do MMA, as funções de forma enriquecedoras do MEF Fourier e do MC, e suas derivadas primeiras são nulas em  $\xi = 0$  e  $\xi = 1$ . Esta característica confere aos métodos enriquecidos a vantagem de utilizar os mesmos procedimentos do MEF

convencional e produzir refinamentos hierárquicos.

### 3.5 ESTRUTURAS RETICULADAS

Nesta seção os conceitos apresentados nas seções anteriores para barras, eixos e vigas são estendidos às estruturas reticuladas compostas por treliças e pórticos planos.

#### 3.5.1 Treliça plana

As treliças planas correspondem a sistemas formados por barras sujeitas apenas a deformações axiais, portanto cada barra possui comportamento descrito pela equação diferencial parcial e formulação variacional de barras retas apresentado no item 3.2.

Soluções analíticas de vibração livre de treliças raramente são encontrados na literatura, portanto são discutidas aqui apenas as soluções aproximadas para estes sistemas estruturais.

##### 3.5.1.1 Soluções aproximadas

Como as treliças são conjuntos de barras com eixos longitudinais geralmente não colineares, é necessário utilizar dois sistemas de coordenadas, um sistema local do elemento e outro global da estrutura, conforme figura 3.9.

As matrizes de rigidez e massa elementares no sistema local são as mesmas matrizes do elemento de barra determinadas conforme equações (3.76) e (3.77). As matrizes baseadas nos sistemas locais devem então ser transformadas para o sistema global antes da solução do problema.



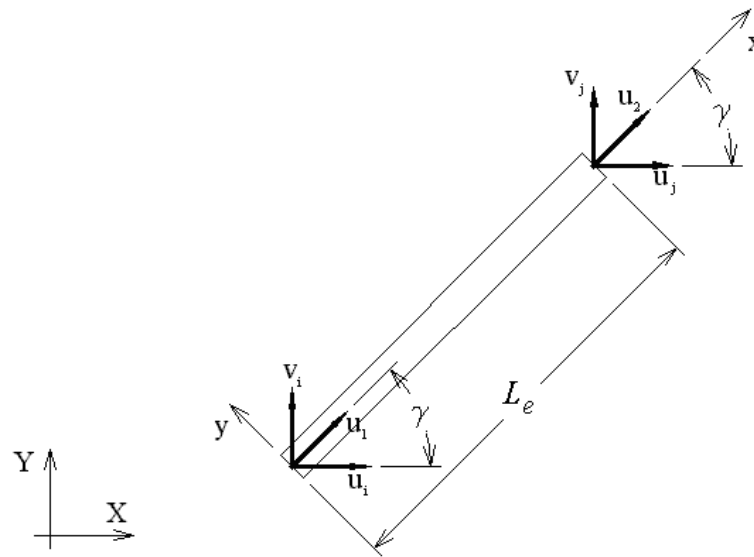


FIGURA 3.9 – TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS PARA BARRA DE TRELIÇA

A transformação entre as coordenadas é realizada utilizando-se a seguinte equação:

$$\mathbf{U} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{U}} \quad (3.172)$$

onde  $\mathbf{U}$  são as coordenadas (graus de liberdade nodais) no sistema local,  $\bar{\mathbf{U}}$  são as coordenadas no sistema global e  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação de coordenadas.

Observando a figura 3.9, onde estão representados os sistemas local e global, verifica-se que, no plano:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (3.173)$$

sendo

$$\begin{aligned}
\cos \gamma &= \frac{x_j - x_i}{L_e} \\
\sin \gamma &= \frac{y_j - y_i}{L_e} \\
L_e &= \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}
\end{aligned} \tag{3.174}$$

onde  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas do nó  $i$  e  $(x_j, y_j)$  são as coordenadas do nó  $j$  do elemento no sistema global de coordenadas.

#### 3.5.1.1.1 Método dos elementos finitos

Logo, na análise de treliças planas pelo MEF as matrizes de rigidez e massa elementares para o elemento de barra são transformadas utilizando-se as seguintes relações:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \tag{3.175}$$

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \tag{3.176}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \end{bmatrix} \tag{3.177}$$

onde  $\mathbf{K}_G$  e  $\mathbf{M}_G$  são as matrizes de rigidez e massa, respectivamente, no sistema global de coordenadas.

#### 3.5.1.1.2 Métodos enriquecidos

Nos métodos enriquecidos, observa-se que os graus de liberdade de campo não sofrem nenhuma alteração com a mudança no sistema de coordenadas, uma vez que as funções de forma enriquecedoras adotadas por estes métodos não alteram o significado físico dos graus de liberdade nodais. Portanto, a transformação de coordenadas (eq. (3.173)) pode ser assim reescrita:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & | & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix} \quad (3.178)$$

As matrizes de rigidez e massa no sistema global para os métodos enriquecidos são obtidas pelas equações (3.175) e (3.176) utilizando a matriz de transformação obtida da equação (3.178).

### 3.5.2 Pórtico plano

Um pórtico plano corresponde a um sistema estrutural formado por barras retas, com deformações axiais devidas aos esforços axiais e deformações laterais devidas à flexão, contidas em um mesmo plano, mas com eixos longitudinais geralmente não colineares.

As barras do pórtico correspondem isoladamente a vigas de Euler-Bernoulli com acréscimo de deformação axial. Por tratarem-se, neste estudo, de barras de material elástico linear sujeitas a pequenas deformações e pequenos deslocamentos, estas deformações podem ser separadas em dois grupos independentes: axiais e laterais.

A solução analítica destas estruturas, embora possível, torna-se inviável para estruturas reais formadas por um grande número de barras, porque as seis constantes envolvidas nas soluções gerais (equações (3.49) e (3.115) para barras uniformes) devem ser determinadas para cada barra da estrutura.

Mesmo para pórticos com pequeno número de barras, a solução analítica é raramente possível se estas barras forem não uniformes. Fica portanto evidente que para estruturas reais é necessária a utilização de soluções aproximadas obtidas

através de métodos numéricos.

### 3.5.2.1 Soluções aproximadas

Novamente, devido à não colinearidade das barras, é necessário o emprego dos sistemas de coordenadas local e global, como indicado na figura 3.10.

As matrizes de massa e rigidez do elemento de pórtico plano são obtidas por superposição das matrizes de massa e rigidez dos elementos de barra e viga de Euler-Bernoulli, obtidos a partir das equações (3.73) e (3.147). Para que estas matrizes possam ser aplicadas a estruturas formadas por diversos elementos é necessária a transformação destas do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global.

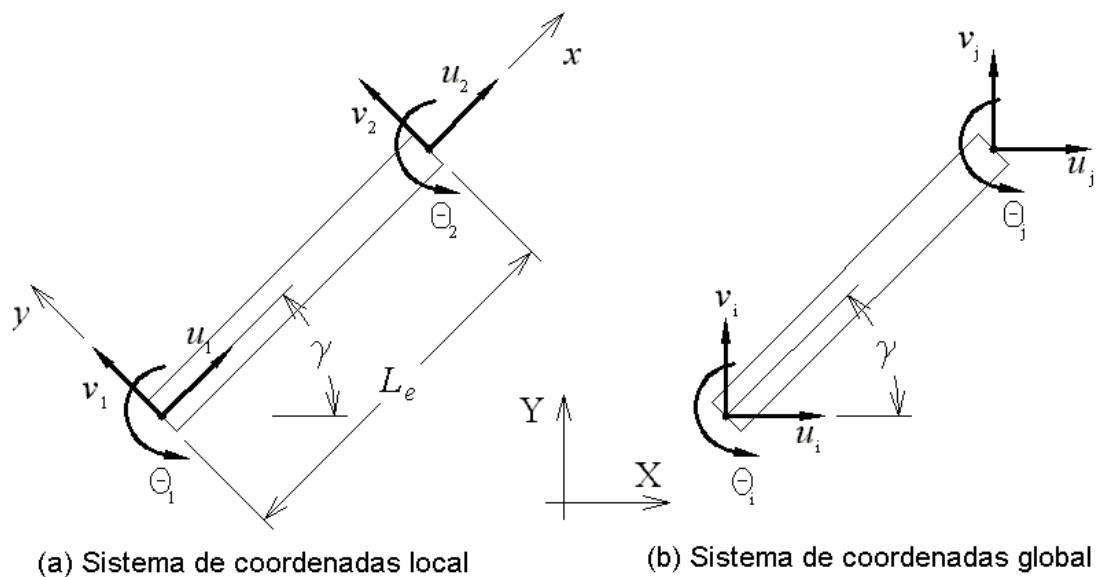


FIGURA 3.10 – TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS PARA BARRA DE PÓRTICO

A transformação entre as coordenadas é realizada utilizando-se novamente a equação (3.172). Observando a figura 3.10, verifica-se que a relação entre os sistemas de coordenadas local e global para o elemento de pórtico plano é:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.179)$$

sendo

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{x_j - x_i}{L_e} \\ \sin \gamma &= \frac{y_j - y_i}{L_e} \\ L_e &= \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \end{aligned} \quad (3.180)$$

onde  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas do nó  $i$  e  $(x_j, y_j)$  são as coordenadas do nó  $j$  do elemento no sistema de coordenadas global.

### 3.5.2.1.1 Método dos elementos finitos

Na análise de vibrações de pórticos planos pelo MEF, as matrizes de rigidez e massa elementares para cada barra são transformadas utilizando-se as equações (3.175) e (3.176), e a matriz de transformação:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.181)$$

### 3.5.2.1.2 Métodos enriquecidos

De maneira análoga aos métodos enriquecidos para treliça, a transformação de coordenadas para o elemento de pórtico plano (eq. (3.179)) pode ser assim reescrita:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ c_{b1} \\ \vdots \\ c_{bn} \\ c_{v1} \\ \vdots \\ c_{vm} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \\ c_{b1} \\ \vdots \\ c_{bn} \\ c_{v1} \\ \vdots \\ c_{vm} \end{Bmatrix} \quad (3.182)$$

sendo  $c_{bi}$  os graus de liberdade de campo para deformação axial,  $n$  o número de funções enriquecedoras correspondentes ao elemento de barra,  $c_{vi}$  os graus de liberdade de campo para deformação lateral e  $m$  o número de funções enriquecedoras correspondentes ao elemento de viga.

Novamente, as matrizes de rigidez e massa no sistema de coordenadas global para os métodos enriquecidos são obtidas pelas equações (3.175) e (3.176), mas utilizando a matriz de transformação correspondente à equação (3.182).

## 4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS APLICADO À PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é um método de Galerkin cujo principal objetivo é a construção de um subespaço de funções de aproximação de dimensão finita, usando conhecimento local sobre a solução da equação diferencial do problema, que garanta bons resultados locais e globais. O MEFG surgiu a partir das idéias do Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade proposto por Melenk e Babuska (1996), no qual o enriquecimento local do subespaço de aproximação é incorporado através do Método da Partição da Unidade.

Neste capítulo são apresentadas as bases matemáticas do Método da Partição da Unidade (MPU) e os elementos generalizados de barra e viga de Euler-Bernoulli para análise de vibrações livres.

### 4.1 BASES MATEMÁTICAS DO MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE

Neste tópico é descrito o Método da Partição da Unidade (MPU) para construção de um espaço conforme de aproximação que é um subespaço do espaço de Hilbert  $H^1$ . Porém, o MPU permite a construção de espaços ainda mais suaves (subespaços de  $H^k, k > 1$ ) ou subespaços de Sobolev  $W^{k,p}$  de maneira semelhante.

Seja  $u \in H^1(\Omega)$  a função a ser aproximada e  $\{\Omega_i\}$  um sistema de subcoberturas sobrepostas que formam uma cobertura aberta do domínio de interesse  $\Omega \in \mathbf{R}^n$ , satisfazendo a condição de sobreposição:

$$\exists M_S \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall x \in \Omega \quad \text{card}\{i | x \in \Omega_i\} \leq M_S \quad (4.1)$$

ou seja, a constante  $M_S$  controla o número máximo de subcoberturas  $\Omega_i$  que se

sobrepõem em qualquer ponto  $x \in \Omega$ . Cabe aqui ressaltar que o conceito de cobertura também é utilizado nos métodos sem malha. Logo, de maneira geral, a cobertura  $\{\Omega_i\}$  pode exceder o domínio  $\Omega$ , desde que  $\Omega \subset [\{\Omega_i\}]$  (figura 4.1).

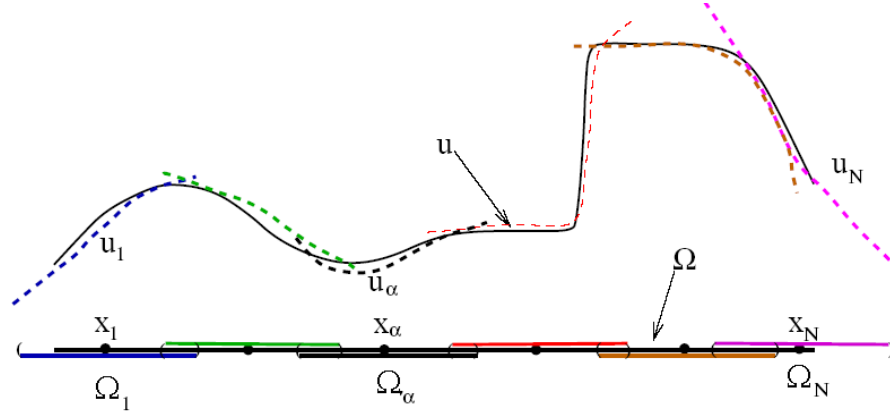


FIGURA 4.1 – COBERTURA  $\{\Omega_i\}$  DO DOMÍNIO  $\Omega$   
FONTE: DUARTE, BABUSKA E ODEN (2000).

Seja ainda,  $\{\eta_i\}$  uma partição da unidade de Lipschitz subordinada à cobertura  $\{\Omega_i\}$  satisfazendo as condições:

$$\text{sup}(\eta_i) = \{x \in \Omega \mid \eta_i(x) \neq 0\} \subset [\Omega_i], \quad \forall i \quad (4.2)$$

$$\sum_i \eta_i \equiv 1 \text{ sobre } \Omega \quad (4.3)$$

$$\|\eta_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_\infty \quad (4.4)$$

$$\|\nabla \eta_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_G / \text{diâm} \Omega_i \quad (4.5)$$

onde  $\text{sup}(\eta_i)$  indica o suporte de definição da função  $\eta_i$ ,  $[\Omega_i]$  indica o fechamento da subcobertura  $\Omega_i$  e,  $C_\infty$  e  $C_G$  são duas constantes. Então  $\{\eta_i\}$  é chamada de uma partição da unidade  $(M_S, C_\infty, C_G)$  subordinada à cobertura  $\{\Omega_i\}$ .

A condição de sobreposição das subcoberturas (equação (4.1)) é importante para garantir que as funções  $\eta_i$  formem uma partição da unidade suficientemente regular. Já a condição da equação (4.5) indica a necessidade de se controlar o gradiente das funções partição da unidade para aproximações no espaço  $H^1$ . (MELENK; BABUSKA, 1996)



Existem diversas maneiras de obter as funções  $\eta_i$ . Quaisquer funções de forma que reproduzam a unidade no domínio e sejam conformes satisfazem as condições da partição da unidade. Fan, Liu e Lee (2004) utilizaram funções  $C^0$  que equivalem às funções lineares do MEF. Diversos outros autores também utilizam as funções de forma do MEF como funções de partição da unidade.

De maneira geral, se  $\{\tau_i\}$  for uma coleção de funções cujos suportes sejam as subcoberturas  $\Omega_i$ , então a normalização

$$\eta_i = \frac{\tau_i}{\sum_j \tau_j} \quad (4.6)$$

leva a uma partição da unidade subordinada à cobertura  $\{\Omega_i\}$ , sendo que para um determinado  $\Omega_i$ , o somatório dado nesta equação se estende apenas aos  $\Omega_j$  tais que  $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ . As funções partição da unidade obtidas herdam a suavidade das funções  $\tau_i$  permitindo então a construção de espaços de aproximação com maior regularidade, como subespaços de  $H^2$ , por exemplo. (MELENK; BABUSKA, 1996)

Se sobre cada subdomínio  $\Omega_i \cap \Omega$  obtém-se um espaço de funções  $S_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega)$  tal que  $u$  pode ser bem aproximado neste subdomínio, então o espaço global  $S$  utilizado para aproximar  $u$  em  $\Omega$  é obtido por:

$$S := \sum_i \eta_i S_i = \left\{ \sum_i \eta_i s_i^j \mid s_i^j \in S_i \right\} \subset H^1(\Omega) \quad (4.7)$$

ou seja, a solução aproximada no ponto  $x$  do domínio é dada por:

$$u_h(x) = \sum_i \sum_{s_i^j \in S_i} \eta_i s_i^j(x) a_{ij} \quad (4.8)$$

onde  $a_{ij}$  são os graus de liberdade.

Demonstra-se ainda que (MELENK; BABUSKA, 1996): se em cada

subdomínio  $\Omega_i \cap \Omega$ ,  $u$  pode ser aproximado por  $s_i^j \in S_i$  tal que:

$$\|u - s_i^j\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_1(i) \quad (4.9)$$

$$\|\nabla(u - s_i^j)\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_2(i) \quad (4.10)$$

então, a solução aproximada  $u_h$  descrita na equação (4.8) satisfaz:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{M_S} C_\infty \left( \sum_i \varepsilon_1^2(i) \right)^{1/2} \quad (4.11)$$

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2M_S} \left( \sum_i \left( \frac{C_G}{\text{diâm}\Omega_i} \right)^2 \varepsilon_1^2(i) + C_\infty^2 \varepsilon_2^2(i) \right)^{1/2} \quad (4.12)$$

Este teorema estabelece que o espaço global  $S$  herda as propriedades de aproximação dos espaços locais  $S_i$ , ou seja,  $u$  pode ser aproximado em  $\Omega$  pelas funções de  $S$  tão bem quanto pode ser aproximado em  $\Omega_i$  pelo espaço local  $S_i$ . O espaço global  $S$  ainda herda a suavidade da partição da unidade e tem garantia de conformidade.

Segundo Melenk e Babuska (1996), uma condição mínima para a escolha do sistema de funções de aproximação, além da boa aproximação local, é que este seja denso no conjunto de todas as soluções da equação diferencial a ser resolvida. Observa-se entretanto que este sistema não é único. A escolha de um sistema em particular depende então de aspectos práticos, como o custo de construção das matrizes, e aspectos teóricos, como a otimalidade do sistema.

Verifica-se que o MPU permite a construção de um espaço conforme de aproximação com a regularidade desejada, independente dos espaços de aproximação locais, sem, no entanto, sacrificar as propriedades aproximadoras destes espaços. Uma malha de elementos, na forma como é empregada no MEF, também não precisa ser construída, embora seja utilizada no MEFG. Outras formas de construção da cobertura  $\{\Omega_i\}$  são empregadas nos métodos sem malha

baseados no MPU.

No MEFG a cobertura  $\{\Omega_i\}$  corresponde à malha de elementos finitos e as subcoberturas  $\Omega_i$  correspondem a subdomínios de  $\Omega$  formados pela união dos elementos que compartilham o nó  $x_i$ , como se pode observar no exemplo de elementos unidimensionais, indicado na figura 4.2, tendo como funções partição da unidade as funções de forma lineares globais do MEF convencional. Verifica-se que, no caso de elementos unidimensionais com as subcoberturas indicadas na figura 4.2, a condição da equação (4.1) é verificada com constante de sobreposição  $M_S = 2$  uniforme em todo o domínio.

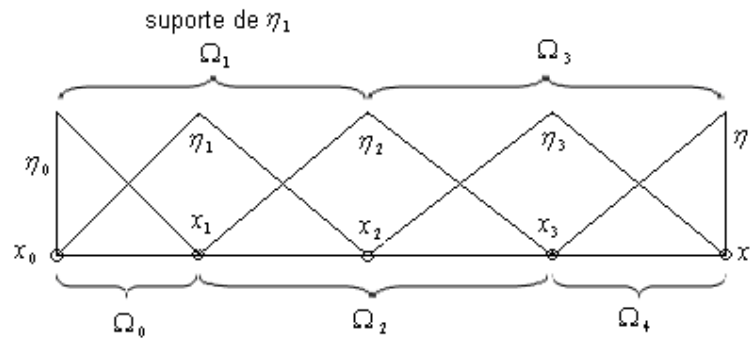


FIGURA 4.2 – SUBDOMÍNIOS E FUNÇÕES PARTIÇÃO DA UNIDADE PARA MALHA DE ELEMENTOS UNIDIMENSIONAIS DO MEFG

Uma das principais dificuldades enfrentadas na implementação dos métodos baseados no MPU é a imposição das condições de contorno essenciais, uma vez que os graus de liberdade da aproximação do MPU nem sempre coincidem com os graus de liberdade nodais do MEF convencional, ou seja,  $u_h(x_i) \neq u_i$ . Em muitos trabalhos apresentados na literatura, a imposição das condições de contorno tem sido executada através da degeneração do espaço de funções aproximadoras na subcobertura (subdomínio) que contém o nó afetado ou, pela utilização de métodos de penalidades ou de multiplicadores de Lagrange. Estas soluções restringem a generalidade dos procedimentos a um grupo limitado de problemas.

Nas próximas seções estão descritas as funções partição da unidade e as funções de aproximação local propostas neste trabalho, além da forma de imposição

das condições de contorno.

## 4.2 ELEMENTO GENERALIZADO DE BARRA RETA

Ao observar a forma fraca do problema de vibração livre de barras retas apresentado no capítulo 3 (eq. (3.65)), verifica-se a necessidade de que o espaço de funções de aproximação global empregado seja subespaço de  $H^1$ . Neste caso utilizam-se como partição da unidade as funções de forma lineares do MEF convencional para barras que, no subdomínio  $\Omega_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$  podem ser descritas por:

$$\eta_i = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}} & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.13)$$

Dois sistemas de funções aproximadoras locais são propostas e analisadas através de diferentes exemplos de aplicação. Para garantir que as condições de contorno essenciais possam ser aplicadas diretamente pela restrição dos graus de liberdade nodais, assim como ocorre no MEF, o espaço de aproximação local é construído a partir da expansão de um sistema de funções constituído da unidade e de outras funções, denominadas de funções enriquecedoras. As funções enriquecedoras selecionadas se anulam no nó  $x_i$  do subdomínio  $\Omega_i$  e representam o comportamento local da solução da equação diferencial governante. A função unitária permite que o espaço de aproximação do MEF linear para barras esteja contido no espaço aproximação global do MEFG. Por outro lado, a característica das funções enriquecedoras se anularem no nó  $x_i$  garante que os graus de liberdade associados ao MEF (graus de liberdade nodais) preservem seu significado físico. Cabe ainda ressaltar que o elemento generalizado de barra reta pode ser também utilizado na análise de vibrações livres torcionais de eixos circulares devido ao fato destes problemas serem matematicamente idênticos.

A primeira alternativa, denominada de MEFG-1 nos exemplos do próximo capítulo, consiste na utilização das funções enriquecedoras empregadas no MC para barras e que correspondem à uma solução particular da equação diferencial que está sendo resolvida (eq. (3.48)). Neste caso o espaço de aproximação local no subdomínio  $\Omega_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$  pode ser escrito como:

$$S_i = \text{span}\{1 \quad \gamma_{1j} \quad \gamma_{2j} \quad \dots\} \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (4.14)$$

$$\gamma_{1j} = \begin{cases} \text{sen}\left(j\pi \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\gamma_{2j} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \text{sen}\left(j\pi \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.16)$$

onde  $\text{span}\{1 \quad \gamma_{1j} \quad \gamma_{2j} \quad \dots\}$  indica o espaço gerado pelo conjunto de funções  $\{1 \quad \gamma_{1j} \quad \gamma_{2j} \quad \dots\}$  e,  $n_l$  é o número de níveis de enriquecimento.

A figura 4.3 apresenta a função partição da unidade e as funções que compõem o espaço de aproximação local do MEFG-1 no subdomínio  $\Omega_i = (1,3)$  com  $x_i = 2$  e  $n_l = 1$ .

Observa-se que o MEFG-1 proposto pode ser escrito também na forma de um método enriquecido, cuja solução aproximada no domínio do elemento mestre de dois nós  $\Omega_e(0,1)$  é dada por:

$$u_h^e(\xi) = u_{MEF}^e + u_{ENRIQ}^e \quad (4.17)$$

$$u_{MEF}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) u_i \quad (4.18)$$

$$u_{ENRIQ}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) \left[ \sum_{j=1}^{n_l} \gamma_j(\xi) a_{ij} \right] \quad (4.19)$$

$$\eta_1 = 1 - \xi \quad (4.20)$$

$$\eta_2 = \xi \quad (4.21)$$

$$\gamma_j = \text{sen}(j\pi\xi) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (4.22)$$

onde  $\eta_i$  são as funções partição da unidade,  $\gamma_j$  são as funções enriquecedoras,  $n_l$  é o número de níveis de enriquecimento,  $u_i$  são os deslocamentos nodais (graus de liberdade nodais) e  $a_{ij}$  são os graus de liberdade de campo associados às funções enriquecedoras  $\gamma_j$ .

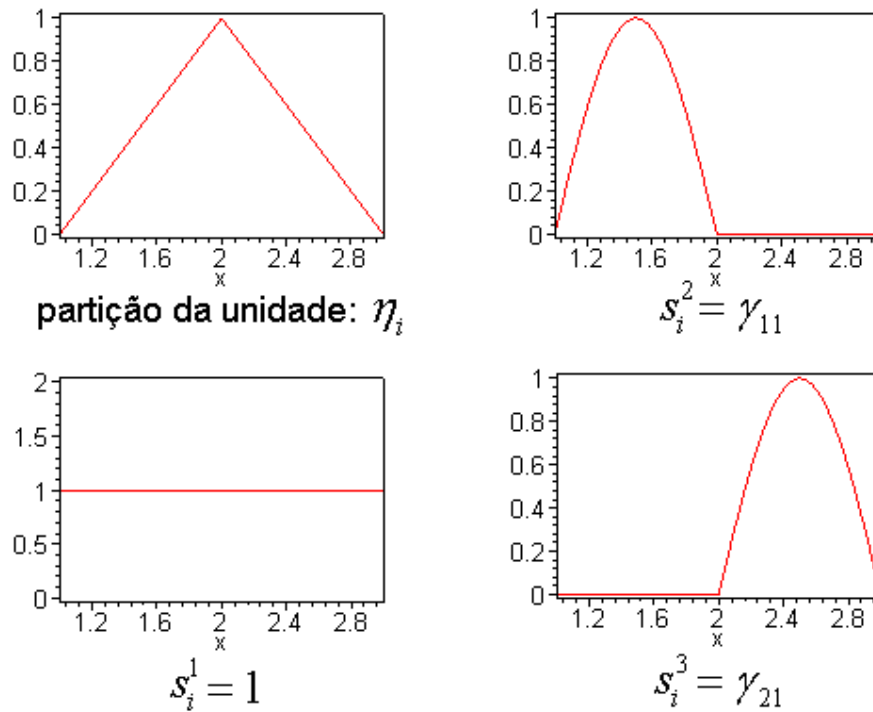


FIGURA 4.3 – FUNÇÃO PARTIÇÃO DA UNIDADE E ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO LOCAL DO MEFG-1 PARA O ELEMENTO DE BARRA RETA NO SUBDOMÍNIO (1,3), COM  $n_l = 1$

Os primeiros resultados obtidos para estas funções enriquecedoras na análise de vibração livre de uma barra fixa e livre foram apresentados no trabalho de Arndt, Machado e Scremin (2007).

Observando a solução analítica de uma barra reta uniforme (equações (3.49) a (3.51)), verifica-se que a solução espacial do problema está contida no espaço de funções  $X$  dado por:

$$X = span\{\sin(\kappa_i x) \quad \cos(\kappa_i x)\} \quad (4.23)$$

$$\kappa_i = \omega_i \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (4.24)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $\rho$  é a massa específica e  $\omega_i$  é a frequência natural de ordem  $i$  obtida pela imposição das condições de contorno. Cabe destacar também que este espaço de funções corresponde ao núcleo do operador diferencial de segunda ordem associado à equação diferencial ordinária que descreve a parcela espacial do problema (eq. (3.48)).

A partir do espaço dado na equação (4.23), propõe-se outra forma para o elemento de barra do MEFG, denominado MEFG-2 nos exemplos do próximo capítulo, onde o espaço de aproximação local no subdomínio  $\Omega_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$  toma a forma:

$$S_i = \text{span} \{ 1 \quad \gamma_{1j} \quad \gamma_{2j} \quad \varphi_{1j} \quad \varphi_{2j} \quad \dots \}, \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (4.25)$$

$$\gamma_{1j} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \text{sen}[\beta_{dj}(x - x_i)] & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\gamma_{2j} = \begin{cases} \text{sen}[\beta_{ej}(x - x_i)] & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\varphi_{1j} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \cos[\beta_{dj}(x - x_i)] - 1 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\varphi_{2j} = \begin{cases} \cos[\beta_{ej}(x - x_i)] - 1 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\beta_{dj} = \sqrt{\frac{\rho_d}{E_d}} \mu_j \quad (4.30)$$

$$\beta_{ej} = \sqrt{\frac{\rho_e}{E_e}} \mu_j \quad (4.31)$$

onde  $E_d$  e  $\rho_d$  são o módulo de elasticidade e a massa específica da barra no subdomínio  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $E_e$  e  $\rho_e$  são o módulo de elasticidade e a massa específica da barra no subdomínio  $(x_{i-1}, x_i)$ , e  $\mu_j$  é a frequência associada ao nível de enriquecimento  $j$ .

A figura 4.4 apresenta a função partição da unidade e as funções que compõem o espaço de aproximação local do MEFG-2 no subdomínio  $\Omega_i = (1, 3)$  com  $x_i = 2$ ,  $n_l = 1$  e  $\beta_{d1} = \beta_{e1} = 3\pi/2$ .

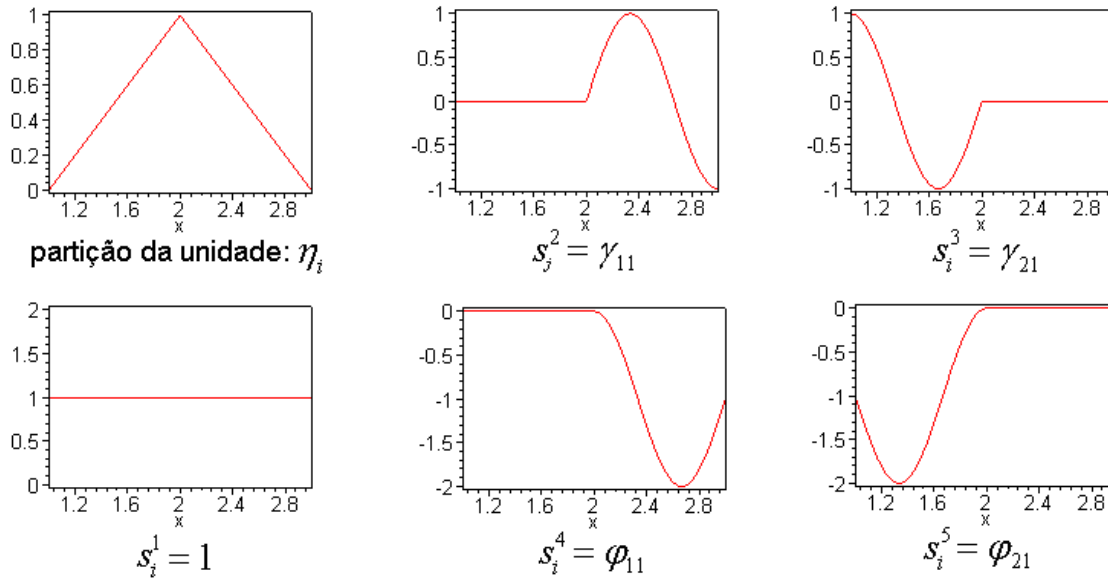


FIGURA 4.4 – FUNÇÃO PARTIÇÃO DA UNIDADE E ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO LOCAL DO MEFG-2 PARA O ELEMENTO DE BARRA RETA NO SUBDOMÍNIO (1,3), COM  $n_l = 1$

O MEFG-2 escrito na forma de um método enriquecido (equação (4.17)), no domínio do elemento mestre de dois nós, apresenta-se da seguinte forma:

$$u_{MEF}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) u_i \quad (4.32)$$

$$u_{ENRIQ}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) \left[ \sum_{j=1}^{n_l} (\gamma_{ij}(\xi) a_{ij} + \varphi_{ij}(\xi) b_{ij}) \right] \quad (4.33)$$

onde  $\eta_i$  são as funções partição da unidade (equações (4.20) e (4.21)),  $\gamma_{ij}$  e  $\varphi_{ij}$  são as funções enriquecedoras dadas por:

$$\gamma_{1j} = \sin(\beta_j L_e \xi) \quad (4.34)$$

$$\gamma_{2j} = \sin(\beta_j L_e (\xi - 1)) \quad (4.35)$$

$$\varphi_{1j} = \cos(\beta_j L_e \xi) - 1 \quad (4.36)$$

$$\varphi_{2j} = \cos(\beta_j L_e (\xi - 1)) - 1, \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (4.37)$$

$$\beta_j = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \mu_j \quad (4.38)$$



sendo que  $n_l$  é o número de níveis de enriquecimento,  $L_e$ ,  $E$  e  $\rho$  são o comprimento, o módulo de elasticidade e a massa específica do elemento, respectivamente,  $u_i$  são os deslocamentos nodais (graus de liberdade nodais),  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  são os graus de liberdade de campo associados às funções enriquecedoras  $\gamma_{ij}$  e  $\varphi_{ij}$ , respectivamente, e  $\mu_j$  é a frequência associada ao nível de enriquecimento  $j$ .

A figura 4.5 apresenta as funções partição da unidade e enriquecedoras do MEFG-2 como apresentadas no domínio do elemento mestre (equações (4.34) a (4.38)).

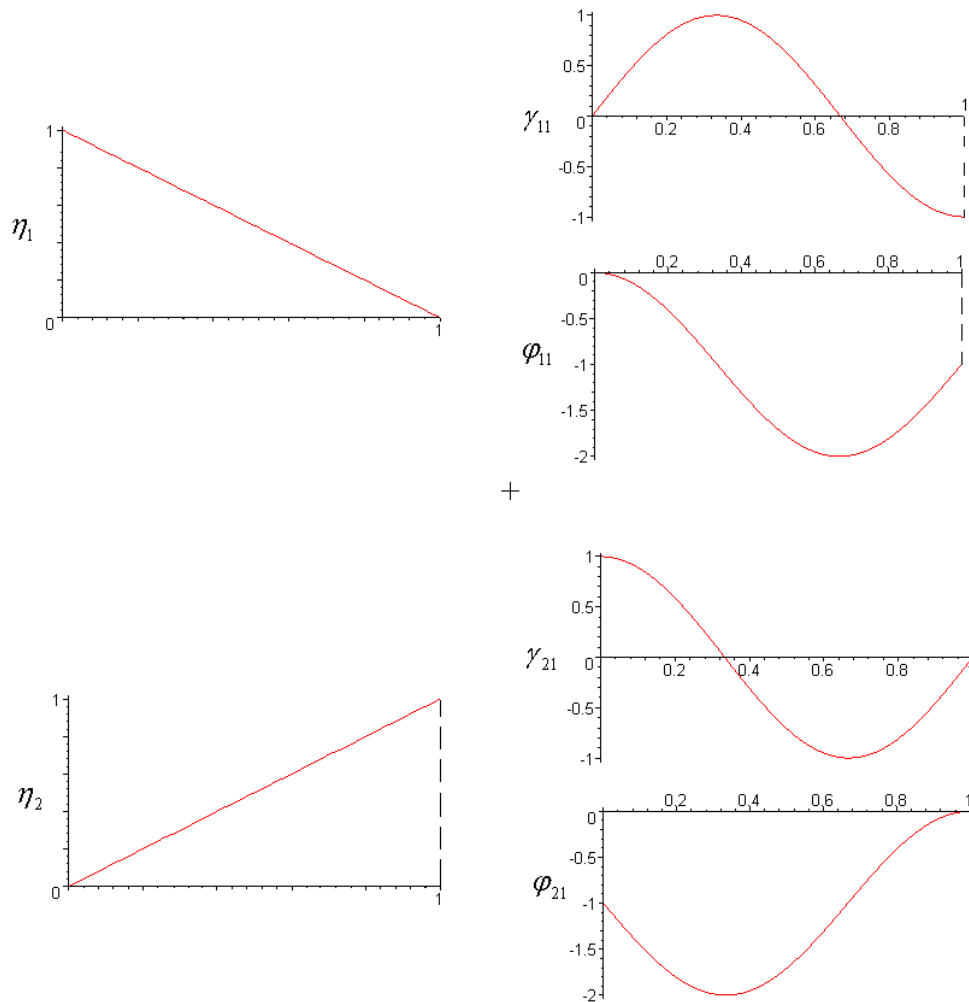


FIGURA 4.5 – FUNÇÕES PARTIÇÃO DA UNIDADE E ENRIQUECEDORAS DO ELEMENTO MESTRE DE BARRA RETA DO MEFG-2, PARA  $j = 1$ ,  $L_e = 1$  E  $\beta_1 = 3\pi/2$

As funções enriquecedoras (equações (4.26) a (4.29) ou (4.34) a (4.37)) são obtidas a partir da solução fundamental da equação diferencial governante da vibração livre de uma barra uniforme, a fim de incluir algum conhecimento sobre a equação diferencial sendo solucionada. Tais funções são escolhidas de maneira a garantir que as funções de forma geradas pelo MEFG tenham suporte compacto no domínio do elemento, conduzindo então a uma solução com continuidade global. A técnica de deslocamento (subtração da unidade) da função enriquecedora utilizada nas funções  $\varphi_{ij}$  também é empregada por Gracie, Ventura e Belytschko (2007) para facilitar a imposição de condições de contorno de deslocamentos prescritos, ou seja,  $u_h(x_i) = u_i$ . Desta forma, a imposição das condições de contorno segue os mesmos procedimentos do MEF convencional. As funções enriquecedoras ainda incorporam propriedades geométricas e mecânicas dos elementos, uma vez que são dependentes do comprimento do elemento e do parâmetro  $\beta_j$ , que por sua vez é função da densidade e do módulo de elasticidade do elemento considerado. Os coeficientes  $\beta_j$  do MEFG-2 são termos de acoplamento entre as parcelas espacial e temporal da equação diferencial governante.

No método proposto, as funções enriquecedoras ( $\gamma_{ij}$  e  $\varphi_{ij}$ ) e seus respectivos graus de liberdade de campo ( $a_{ij}$  e  $b_{ij}$ ) são associados a cada elemento. Por outro lado, cada grau de liberdade nodal ( $u_i$ ) é associado a um nó, como no MEF convencional. Logo, na montagem das matrizes de rigidez e massa globais não há acoplamentos dos graus de liberdade de campo ( $a_{ij}$  e  $b_{ij}$ ) como ocorre com os graus de liberdade nodais de elementos ligados a nós comuns. Este aspecto permite maior flexibilidade de aproximação do método e elimina a necessidade de rotação destes graus de liberdade de um sistema de coordenadas locais para o sistema de coordenadas globais na análise de barras inclinadas e treliças. Cabe ainda destacar que os graus de liberdade de campo ( $a_{ij}$  e  $b_{ij}$ ) não têm qualquer significado físico direto.

Alguns dos primeiros resultados obtidos pelo MEFG-2 na análise de vibração livre de barras e treliças foram apresentados nos trabalhos de Arndt, Machado e

Scremin (2008a, 2008b).

Pode-se notar que quando  $\gamma_{ij} = 0$  e  $\varphi_{ij} = 0$ , ou  $n_l = 0$ , o MEFG corresponde ao MEF convencional. Cabe ainda destacar que a parcela enriquecida da solução aproximada do MEFG,  $u_{ENRIQ}^e$ , é diferente da adotada no MMA e no MC.

O método proposto permite um refinamento  $h$ , para um número fixo de níveis de enriquecimentos ( $n_l$ ), aumentando-se o número de elementos da malha. Também é possível obter um refinamento  $p$  hierárquico com o aumento do número de níveis de enriquecimento  $n_l$ .

#### 4.2.1 Refinamento adaptativo

Neste trabalho também é proposto um refinamento adaptativo utilizando o MEFG-2. A idéia principal do Método dos Elementos Finitos Generalizados Adaptativo (MEFG Adaptativo) é similar ao processo do quociente de Rayleigh para determinar um autovalor específico. O quociente de Rayleigh é um escalar  $\lambda_r$ , dado por (MEIROVITCH, 1975; CHOPRA, 1995):

$$\lambda_r = \frac{\mathbf{u}_r^T \mathbf{K} \mathbf{u}_r}{\mathbf{u}_r^T \mathbf{M} \mathbf{u}_r} \quad (4.39)$$

onde  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  são as matrizes de rigidez e massa do sistema analisado, respectivamente. Demonstra-se que, se um vetor arbitrário  $\mathbf{u}_r$  coincide com um dos autovetores do sistema, então o quociente  $\lambda_r$  se reduz ao autovalor associado. Este quociente tem valores estacionários na vizinhança do sistema de autovetores, logo pode ser aplicado iterativamente para refinar um autovalor a partir de um autovetor usado anteriormente como tentativa.

O MEFG Adaptativo é um processo iterativo cujo principal objetivo é aumentar a precisão de uma frequência (autovalor) relacionada a um modo de vibrar escolhido, cuja ordem é aqui denominada de “ordem alvo”. O fluxograma com blocos A a H apresentado na figura 4.6 representa o processo adaptativo. Neste

fluxograma,  $\omega_{alvo}$  corresponde à frequência relacionada ao modo alvo e  $\lambda_{alvo} = \omega_{alvo}^2$  é o autovalor associado.

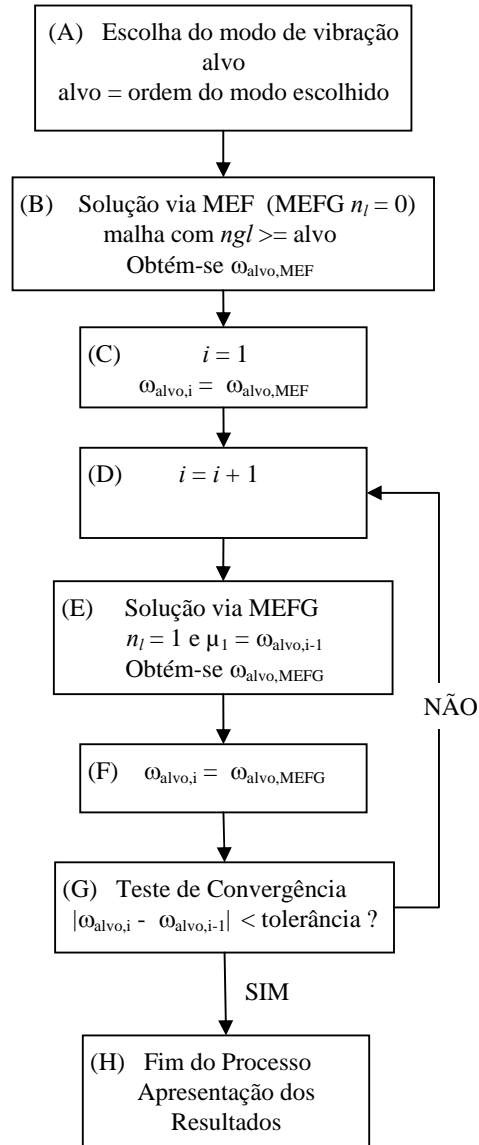


FIGURA 4.6 – FLUXOGRAMA DO MEFG ADAPTATIVO

O primeiro passo do processo adaptativo do MEFG (blocos A a C) consiste na obtenção de uma primeira aproximação da frequência alvo pelo MEF convencional (MEFG com  $n_l = 0$ ). A malha de elementos finitos usada na análise deve ser refinada o suficiente para capturar uma primeira aproximação da frequência alvo. Para tanto, basta utilizar uma malha com número de graus de liberdade ( $ngl$ )

efetivos, após a introdução das condições de contorno, igual ou maior que a ordem da frequência alvo, e que seja capaz de representar a geometria do problema. Os passos subsequentes (blocos D a G) consistem na aplicação do MEFG com apenas um nível de enriquecimento ( $n_l = 1$ ), para a mesma malha de elementos finitos, utilizando como frequência  $\mu_j$  ( $j = 1$ , blocos D e E) das funções enriquecedoras (equações (4.34) a (4.37)) a frequência alvo obtida no passo anterior. Ao longo do processo iterativo nenhum refinamento da malha é realizado.

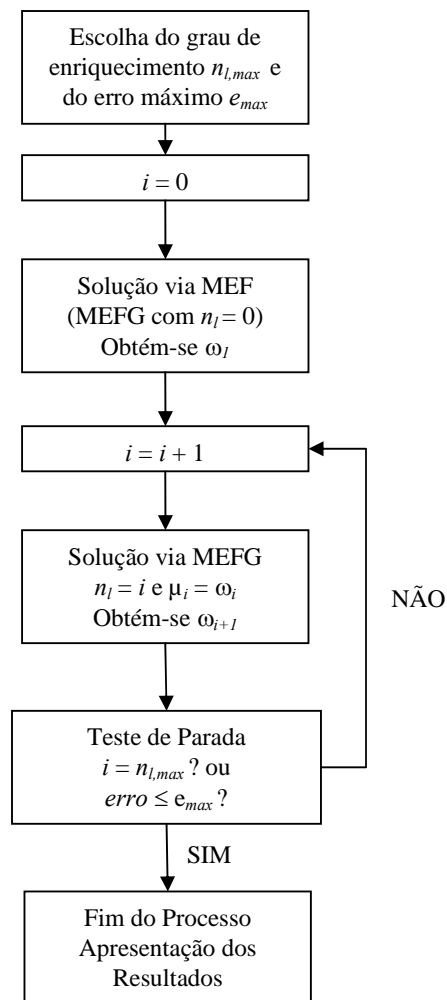
Tanto o MEF convencional quanto o MEFG Adaptativo permitem obter a cada análise tantas frequências quantos forem os graus de liberdade efetivos do modelo. Entretanto, devido às características de adaptatividade à frequência alvo do MEFG Adaptativo, para cada frequência que se deseja determinar através deste processo é necessário executar uma nova análise diferente tomando-a como frequência alvo.

#### 4.2.2 Refinamento $p$ adaptativo

O refinamento  $p$  adaptativo do MEFG surge diretamente pelo aumento gradativo do número de níveis de enriquecimento ( $n_l$ ) em cada etapa do processo de refinamento. A figura 4.7 apresenta o fluxograma do processo  $p$  adaptativo proposto. Neste fluxograma  $\omega_i$  corresponde à frequência natural de ordem  $i$ .

Diferentemente do MEFG Adaptativo, o refinamento  $p$  adaptativo permite melhorar gradativamente a precisão de todas as frequências obtidas na análise.

O elemento generalizado de treliça plana é obtido através do mesmo procedimento utilizado pelos métodos enriquecidos e descrito na seção 3.5.1 do capítulo 3.

FIGURA 4.7 – FLUXOGRAMA DO REFINAMENTO  $p$  ADAPTATIVO DO MEFG

### 4.3 ELEMENTO GENERALIZADO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI

Para a análise da vibração livre de vigas de Euler-Bernoulli pelo MEFG são propostos três sistemas de funções aproximadoras locais para os refinamentos  $h$  e  $p$  e um sistema diferente destes para o processo adaptativo. O comportamento destas versões do MEFG é analisado através de diferentes exemplos de aplicação no próximo capítulo.

Para garantir que as condições de contorno essenciais possam ser aplicadas diretamente pela restrição dos graus de liberdade nodais, assim como ocorre no MEF, o espaço de aproximação local é construído de forma a gerar

funções de forma relacionadas ao MEF convencional e funções de forma enriquecidas. As funções de forma enriquecidas e suas derivadas primeiras devem ser nulas nos nós de cada elemento para garantir que os graus de liberdade associados ao MEF (graus de liberdade nodais) preservem seu significado físico.

Ao observar a forma fraca do problema de vibração livre de vigas retas de Euler-Bernoulli apresentada no capítulo 3 (eq. (3.139)), verifica-se a necessidade de que o espaço de funções de aproximação global empregado seja subespaço de  $H^2$ .

Como primeira alternativa propõe-se a utilização das mesmas funções de partição da unidade lineares do elemento de barra apresentadas na equação (4.13)). Neste caso é necessário que o espaço de funções de aproximação local escolhido garanta a regularidade necessária do espaço global. Para garantir a imposição das condições de contorno pelos procedimentos do MEF, como ocorre com os métodos enriquecidos, é necessário que o sistema de aproximações locais contenha funções que reproduzam as funções de forma do MEF convencional. O espaço de aproximação local no subdomínio  $\Omega_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$  toma então a forma:

$$S_i = \text{span}\{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \gamma_{1j} \quad \gamma_{2j} \quad \dots\}, \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (4.40)$$

$$\phi_1 = \begin{cases} 3 \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - 2 \left( \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 1 + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} - 2 \left( \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\phi_2 = \begin{cases} \left[ \left( \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right] (x_i - x_{i-1}) & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \left[ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} - \left( \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 \right] (x_{i+1} - x_i) & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.42)$$

onde  $\gamma_{1j}$  e  $\gamma_{2j}$  são as funções enriquecedoras.

Escrevendo a solução aproximada no domínio do elemento mestre de dois nós  $\Omega_e(0,1)$ , na forma dos métodos enriquecidos (equação (4.17)), obtém-se:

$$v_h^e(\xi) = v_{MEF}^e + v_{ENRIQ}^e \quad (4.43)$$

$$v_{MEF}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) (\phi_{1i}(\xi) v_i + \phi_{2i}(\xi) \theta_i) \quad (4.44)$$

$$v_{ENRIQ}^e(\xi) = \sum_{l=1}^2 \eta_l(\xi) \left[ \sum_{j=1}^{n_l} \gamma_j(\xi) a_{lj} \right] \quad (4.45)$$

$$\phi_{11} = -2\xi^2 + \xi + 1 \quad (4.46)$$

$$\phi_{12} = 3\xi - 2\xi^2 \quad (4.47)$$

$$\phi_{21} = L_e(\xi - \xi^2) \quad (4.48)$$

$$\phi_{22} = L_e(\xi^2 - \xi) \quad (4.49)$$

onde  $\eta_i$  são as funções partição da unidade lineares (equações (4.20) e (4.21)),  $\phi_{1i}$  e  $\phi_{2i}$  as funções associadas aos graus de liberdade nodais,  $\gamma_j$  as funções enriquecedoras,  $n_l$  o número de níveis de enriquecimento,  $v_i$  os deslocamentos nodais,  $\theta_i$  as rotações nodais e  $a_{lj}$  os graus de liberdade de campo associados às funções enriquecedoras. Como funções enriquecedoras podem ser utilizadas quaisquer funções que garantam a regularidade necessária, permitam a imposição das condições de contorno pelos procedimentos do MEF e contenham informações sobre a solução da equação diferencial, como as associadas ao MMA e ao MC.

Apresenta-se, a seguir, uma primeira alternativa de funções enriquecedoras para o MEF utilizando as mesmas funções analíticas empregadas no MC, que são, no espaço de funções aproximadoras locais do MPU (eq. (4.40)) do subdomínio  $\Omega_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$ , as seguintes:

$$\gamma_{1j} = \begin{cases} \sin\left(\lambda_j \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) - \sinh\left(\lambda_j \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) + \\ -\alpha_j \left[ \cos\left(\lambda_j \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) - \cosh\left(\lambda_j \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) \right] & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.50)$$



$$\gamma_{2j} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \sin\left(\lambda_j \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) - \sinh\left(\lambda_j \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) + \\ -\alpha_j \left[ \cos\left(\lambda_j \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) - \cosh\left(\lambda_j \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) \right] & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.51)$$

$$\alpha_j = \frac{\sin \lambda_j - \sinh \lambda_j}{\cos \lambda_j - \cosh \lambda_j} \quad (4.52)$$

ou, no domínio do elemento mestre (eq. (4.43)):

$$\gamma_j = \sin(\lambda_j \xi) - \sinh(\lambda_j \xi) - \alpha_j [\cos(\lambda_j \xi) - \cosh(\lambda_j \xi)] \quad (4.53)$$

sendo  $\lambda_j$  os autovalores obtidos pela solução da equação característica dada na equação (3.166). Esta versão do MEFG será doravante indicada pela sigla MEFG MC.

Outra alternativa para as funções enriquecedoras é a utilização das funções de forma dos modos normais utilizadas no MMA, sem normalização, que são, no espaço de funções aproximadoras locais do MPU (eq. (4.40)), as seguintes:

$$\gamma_{1j} = \begin{cases} \cos(\lambda_j z_1) - \frac{1 + (-1)^j e^{-\lambda_j}}{1 - (-1)^j e^{-\lambda_j}} \sin(\lambda_j z_1) + \\ - \frac{e^{-\lambda_j z_1} - (-1)^j e^{-\lambda_j(1-z_1)}}{1 - (-1)^j e^{-\lambda_j}} & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.54)$$

$$z_1 = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$\gamma_{2j} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \cos(\lambda_j z_2) - \frac{1 + (-1)^j e^{-\lambda_j}}{1 - (-1)^j e^{-\lambda_j}} \sin(\lambda_j z_2) + \\ - \frac{e^{-\lambda_j z_2} - (-1)^j e^{-\lambda_j(1-z_2)}}{1 - (-1)^j e^{-\lambda_j}} & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.55)$$

$$z_2 = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

ou, no domínio do elemento mestre (eq. (4.43)):

$$\gamma_j = \cos(\lambda_j \xi) - \frac{1 + (-1)^j e^{-\lambda_j}}{1 - (-1)^j e^{-\lambda_j}} \sin(\lambda_j \xi) - \frac{e^{-\lambda_j \xi} - (-1)^j e^{-\lambda_j(1-\xi)}}{1 - (-1)^j e^{-\lambda_j}} \quad (4.56)$$

onde  $\lambda_j$  são autovalores obtidos pela solução da equação característica dada na equação (3.168). Esta versão do MEFG será doravante indicada pela sigla MEFG MMA. O MEFG MC e o MEFG MMA são equivalentes, pois diferem apenas na forma em que as funções enriquecedoras são expressas. A

figura 4.8 apresenta a função partição da unidade e as funções que compõem o espaço de aproximação local do MEFG MC e MEFG MMA no subdomínio  $\Omega_i = (1,3)$  com  $x_i = 2$  e  $n_l = 1$ .

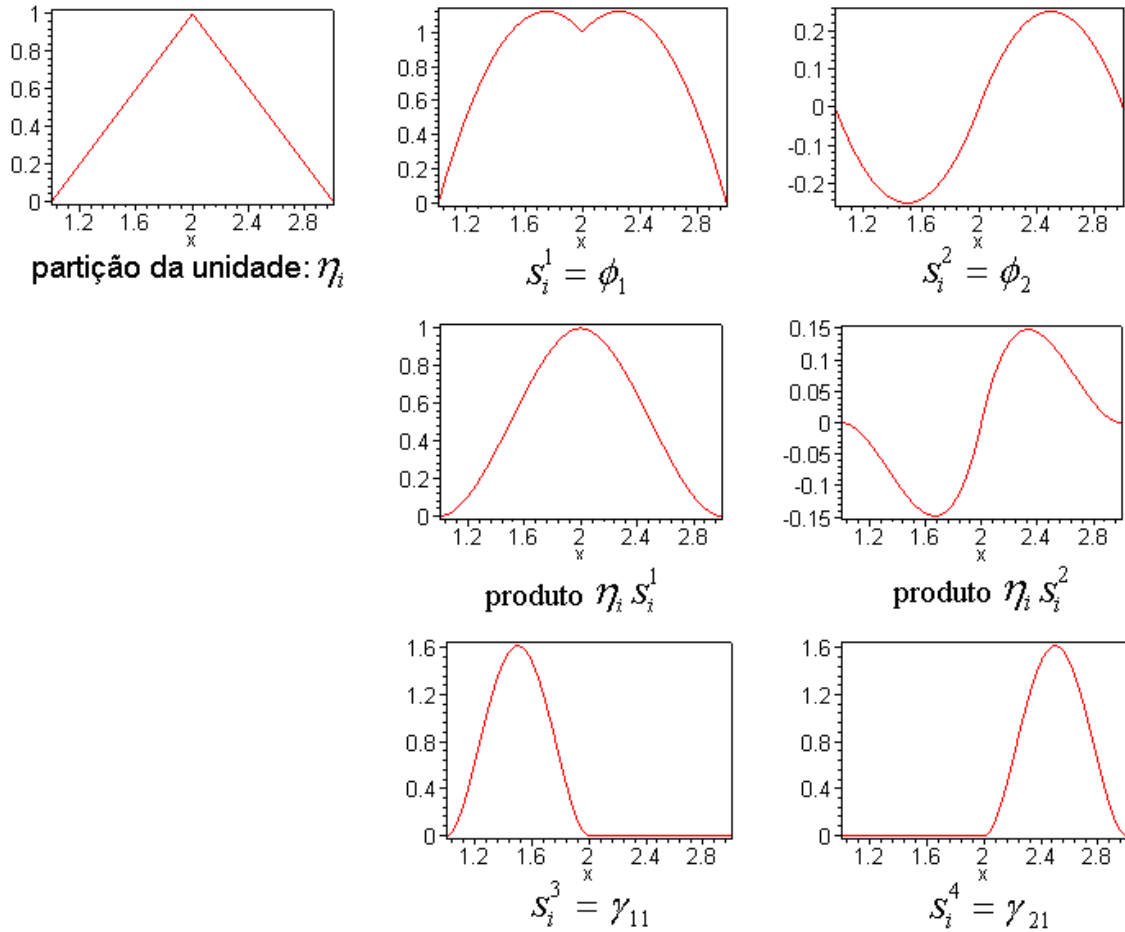


FIGURA 4.8 – FUNÇÃO PARTIÇÃO DA UNIDADE E ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO LOCAL DO MEFG MC E MEFG MMA PARA O ELEMENTO DE VIGA, NO SUBDOMÍNIO (1,3)

Uma terceira alternativa para as funções enriquecedoras do MEFG é a utilização das funções trigonométricas dos modos restritos utilizadas no MMA, que são, no espaço de funções aproximadoras locais do MPU (eq. (4.40)) do subdomínio  $\Omega_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$ , as seguintes:

$$\gamma_{1j} = \begin{cases} \cos\left[(j-1)\pi \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right] - \cos\left[(j+1)\pi \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right] & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.57)$$

$$\gamma_{2j} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \cos\left[(j-1)\pi \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right] - \cos\left[(j+1)\pi \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right] & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.58)$$

ou, no domínio do elemento mestre (eq. (4.43)):

$$\gamma_j = \cos[(j-1)\pi\xi] - \cos[(j+1)\pi\xi] \quad (4.59)$$

Esta versão do MEFG é indicada pela sigla MEFG Trig. A figura 4.9 apresenta as funções enriquecedoras  $\gamma_{1j}$  e  $\gamma_{2j}$  do espaço de aproximação local do MEFG Trig no subdomínio  $\Omega_i = (1,3)$  com  $x_i = 2$  e  $n_l = 1$ .

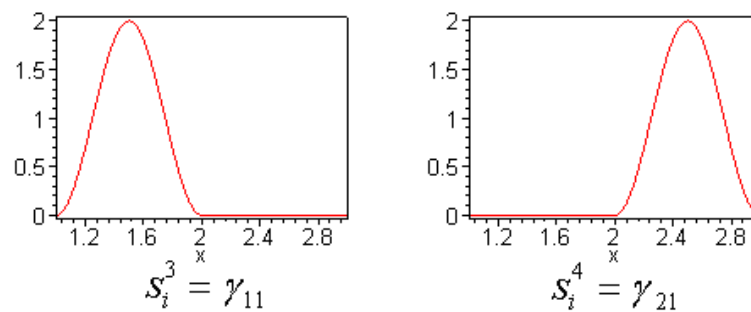


FIGURA 4.9 – FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS DO ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO LOCAL DO MEFG TRIG PARA O ELEMENTO DE VIGA NO SUBDOMÍNIO (1,3)

De maneira análoga ao elemento de barra, em todas as formas do MEFG propostas para o elemento de viga, as funções enriquecedoras e os respectivos

graus de liberdade de campo são associados aos elementos e não aos nós, como são os graus de liberdade nodais ( $u_i$  e  $\theta_i$ ) do MEF. Logo, na montagem das matrizes de rigidez e massa globais não há acoplamentos dos graus de liberdade de campo e elimina-se a necessidade de rotação destes graus de liberdade de um sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global na análise de vigas inclinadas.

Novamente observa-se que o MEF convencional é um caso particular de todas as formas do MEFG propostas, fazendo-se nestas simplesmente  $n_l = 0$ .

O método proposto permite um refinamento  $h$  para um número de enriquecimentos  $n_l$  fixo, aumentando-se o número de elementos da malha, e um refinamento  $p$  hierárquico com o aumento do número de níveis de enriquecimento  $n_l$ .

#### 4.3.1 Refinamento adaptativo

Utilizando novamente a idéia básica do quociente de Rayleigh baseada na equação (4.39), propõe-se outra forma do MEFG para a análise adaptativa de vigas de Euler-Bernoulli.

Neste caso, para garantir que o espaço de funções de aproximação global empregado seja subespaço de  $H^2$ , utilizam-se como partição da unidade as funções de forma cúbicas do MEF convencional para vigas que, no subdomínio  $\Omega_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$  podem ser descritas por:

$$\eta_i = \begin{cases} 3\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2 - 2\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^3 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 1 - 3\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 + 2\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^3 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.60)$$

Para garantir que as condições de contorno essenciais possam ser aplicadas diretamente como no MEF, o espaço de aproximação local agora é construído a partir da expansão de um sistema de funções constituído da unidade,

de uma função capaz de gerar as funções de forma do MEF relacionadas às rotações nodais e de outras funções enriquecedoras. Estas funções enriquecedoras e suas derivadas primeiras são nulas no nó  $x_i$  do subdomínio  $\Omega_i$  e representam o comportamento local da solução da equação diferencial governante. A função unitária permite que as funções de forma do MEF relacionadas aos deslocamentos nodais estejam contidas no espaço aproximação global do MEFG.

Observando a solução analítica de uma viga prismática na forma proposta por Gartner e Olgac (1982) (eqs. (3.118) a (3.120)), verifica-se que a solução espacial do problema pertence ao espaço de funções  $X$  dado por:

$$X = span\{ \sin(\kappa x) \quad \cos(\kappa x) \quad e^{-\kappa x} \quad e^{-\kappa(L-x)} \} \quad (4.61)$$

$$\kappa = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho A}{EI}} \quad (4.62)$$

onde  $A$  é a área da seção transversal,  $I$  é o momento de inércia em relação ao eixo de flexão,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $\rho$  é a massa específica,  $L$  é o comprimento da viga e  $\omega$  é a frequência natural obtida pela imposição das condições de contorno. Cabe destacar também que este espaço de funções corresponde ao núcleo do operador diferencial de quarta ordem associado à equação diferencial ordinária que descreve a parcela espacial do problema (eq. (3.113)).

A partir do espaço dado na equação (4.61), propõe-se para o elemento de viga do MEFG Adaptativo, o espaço de aproximação local no subdomínio  $\Omega_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$  na forma:

$$S_i = span\{ 1 \quad \phi \quad \gamma_{11j} \quad \gamma_{12j} \quad \gamma_{21j} \quad \gamma_{22j} \quad \gamma_{31j} \quad \gamma_{32j} \quad \gamma_{41j} \quad \gamma_{42j} \quad \dots \}, \quad (4.63)$$

$j = 1, 2, \dots, n_l$

$$\phi = \begin{cases} \frac{\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^3 - \left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2}{3\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2 - 2\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)}(x_i-x_{i-1}) & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} - 2\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 + \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^3}{1 - 3\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 + 2\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^3}(x_{i+1}-x_i) & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.64)$$

$$\gamma_{11j} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \cos[\beta_{dj}(x-x_i)] - 1 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.65)$$

$$\gamma_{12j} = \begin{cases} \cos[\beta_{ej}(x_i-x)] - 1 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.66)$$

$$\gamma_{21j} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \sin[\beta_{dj}(x-x_i)] - \beta_{dj}(x-x_i) & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.67)$$

$$\gamma_{22j} = \begin{cases} \sin[\beta_{ej}(x_i-x)] - \beta_{ej}(x_i-x) & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.68)$$

$$\gamma_{31j} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ e^{-\beta_{dj}(x-x_i)} + \beta_{dj}(x-x_i) - 1 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.69)$$

$$\gamma_{32j} = \begin{cases} e^{-\beta_{ej}(x_i-x)} + \beta_{ej}(x_i-x) - 1 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.70)$$

$$\gamma_{41j} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ e^{-\beta_{dj}(x_{i+1}-x)} - [\beta_{dj}(x-x_i) + 1] e^{-\beta_{dj}(x_{i+1}-x_i)} & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.71)$$

$$\gamma_{42j} = \begin{cases} e^{-\beta_{ej}(x-x_{i-1})} - [\beta_{ej}(x_i-x) + 1] e^{-\beta_{ej}(x_i-x_{i-1})} & \text{se } x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{se } x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (4.72)$$

$$\beta_{dj} = \sqrt[4]{\frac{\mu_j^2 \rho_d A_d}{E_d I_d}} \quad (4.73)$$

$$\beta_{ej} = \sqrt[4]{\frac{\mu_j^2 \rho_e A_e}{E_e I_e}} \quad (4.74)$$

onde  $E_d$ ,  $\rho_d$ ,  $A_d$  e  $I_d$  são o módulo de elasticidade, a massa específica, a área e o momento de inércia da viga no subdomínio  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $E_e$ ,  $\rho_e$ ,  $A_e$  e  $I_e$  são o módulo de elasticidade, a massa específica, a área e o momento de inércia da viga no subdomínio  $(x_{i-1}, x_i)$ , e  $\mu_j$  é a frequência associada ao nível de enriquecimento  $j$ . A figura 4.10 apresenta a função partição da unidade e as funções que compõem o

espaço de aproximação local do MEFG Adaptativo no subdomínio  $\Omega_i = (1,3)$  com  $x_i = 2$ ,  $n_l = 1$  e  $\beta_{d1} = \beta_{e1} = 3\pi/2$ .

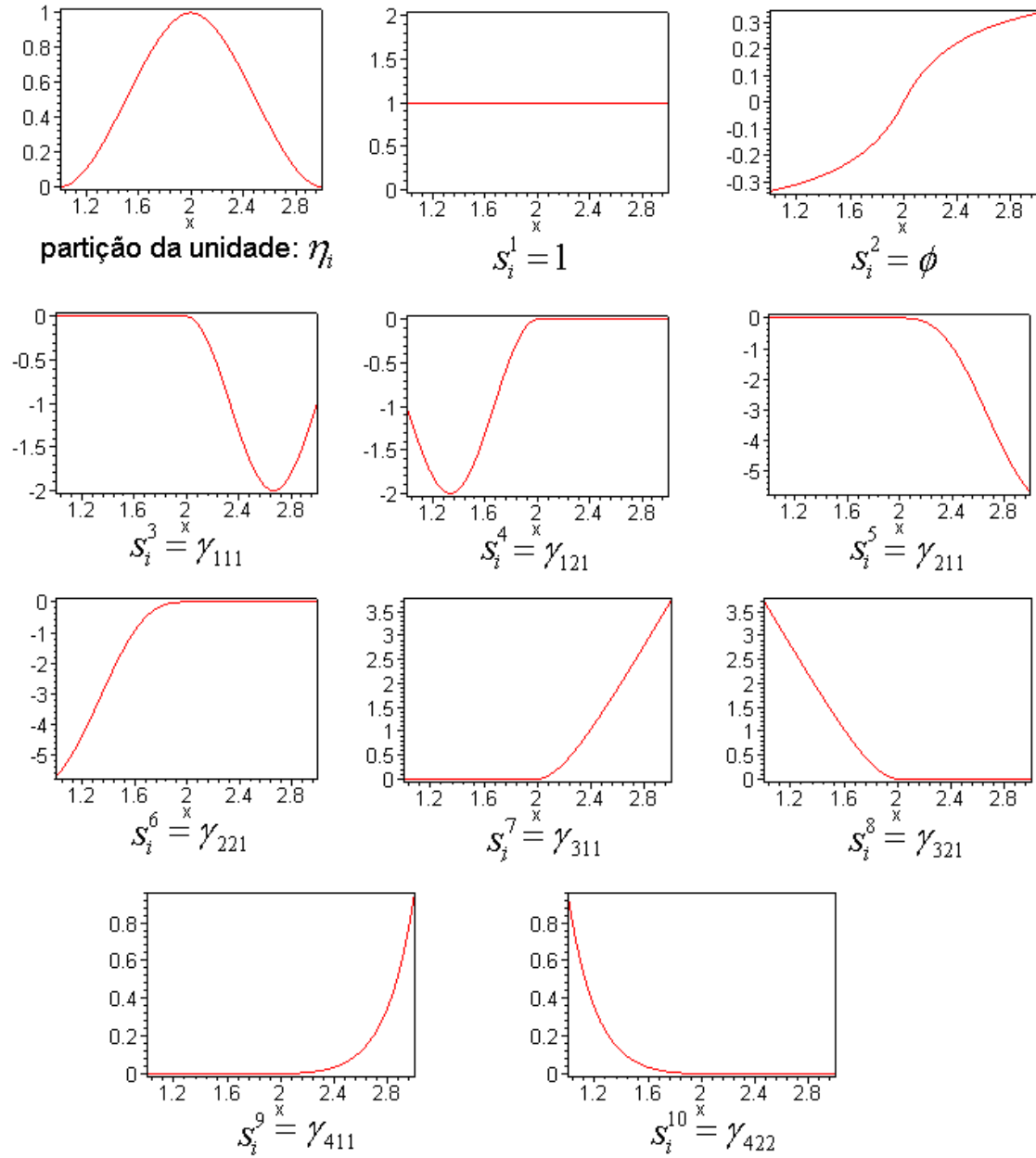


FIGURA 4.10 – FUNÇÃO PARTIÇÃO DA UNIDADE E ESPAÇO DE APROXIMAÇÃO LOCAL DO MEFG ADAPTATIVO PARA ELEMENTO DE VIGA, NO SUBDOMÍNIO (1,3)

No domínio do elemento mestre de dois nós, a solução aproximada do MEFG Adaptativo pode ser escrita da seguinte forma:

$$v_h^e(\xi) = v_{MEF}^e + v_{ENRIQ}^e \quad (4.75)$$

$$v_{MEF}^e = \sum_{i=1}^2 [\eta_i u_i + \phi_i \theta_i] \quad (4.76)$$

$$v_{ENRIQ}^e = \sum_{i=1}^2 \eta_i \left[ \sum_{j=1}^{n_i} (\gamma_{1ij} a_{ij} + \gamma_{2ij} b_{ij} + \gamma_{3ij} c_{ij} + \gamma_{4ij} d_{ij}) \right] \quad (4.77)$$

onde  $\eta_i$  são as funções partição da unidade,  $\phi_i$  são as funções de forma do MEF convencional associadas às rotações nodais e  $\gamma_{kij}$  são as funções enriquecedoras dadas por:

$$\eta_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (4.78)$$

$$\eta_2 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (4.79)$$

$$\phi_1 = L_e (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad (4.80)$$

$$\phi_2 = L_e (\xi^3 - \xi^2) \quad (4.81)$$

$$\gamma_{11j} = \cos(\beta_j L_e \xi) - 1 \quad (4.82)$$

$$\gamma_{12j} = \cos(\beta_j L_e (1 - \xi)) - 1 \quad (4.83)$$

$$\gamma_{21j} = \sin(\beta_j L_e \xi) - \beta_j L_e \xi \quad (4.84)$$

$$\gamma_{22j} = \sin(\beta_j L_e (1 - \xi)) - \beta_j L_e (1 - \xi) \quad (4.85)$$

$$\gamma_{31j} = e^{-\beta_j L_e \xi} + \beta_j L_e \xi - 1 \quad (4.86)$$

$$\gamma_{32j} = e^{-\beta_j L_e (1 - \xi)} + \beta_j L_e (1 - \xi) - 1 \quad (4.87)$$

$$\gamma_{41j} = e^{-\beta_j L_e (1 - \xi)} - (\beta_j L_e \xi + 1) e^{-\beta_j L_e} \quad (4.88)$$

$$\gamma_{42j} = e^{-\beta_j L_e \xi} - [\beta_j L_e (1 - \xi) + 1] e^{-\beta_j L_e} \quad (4.89)$$

$$\beta_j = \sqrt[4]{\frac{\mu_j^2 \rho A}{EI}}, \quad j = 1, 2, \dots, n_l \quad (4.90)$$

sendo  $n_l$  o número de níveis de enriquecimento,  $L_e$  o comprimento do elemento,  $E$ ,  $A$ ,  $I$  e  $\rho$  o módulo de elasticidade, a área da seção transversal, o momento de inércia e a massa específica do elemento, respectivamente,  $u_i$  e  $\theta_i$  os deslocamentos e as rotações nodais (graus de liberdade nodais), respectivamente,  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  e  $d_{ij}$  os graus de liberdade de campo associados às funções de enriquecedoras  $\gamma_{kij}$ , e  $\mu_j$  a frequência associada ao nível de enriquecimento  $j$ . A figura 4.11 apresenta as funções partição da unidade e enriquecedoras do MEFG



Adaptativo no domínio do elemento mestre (equações (4.78) a (4.89)).

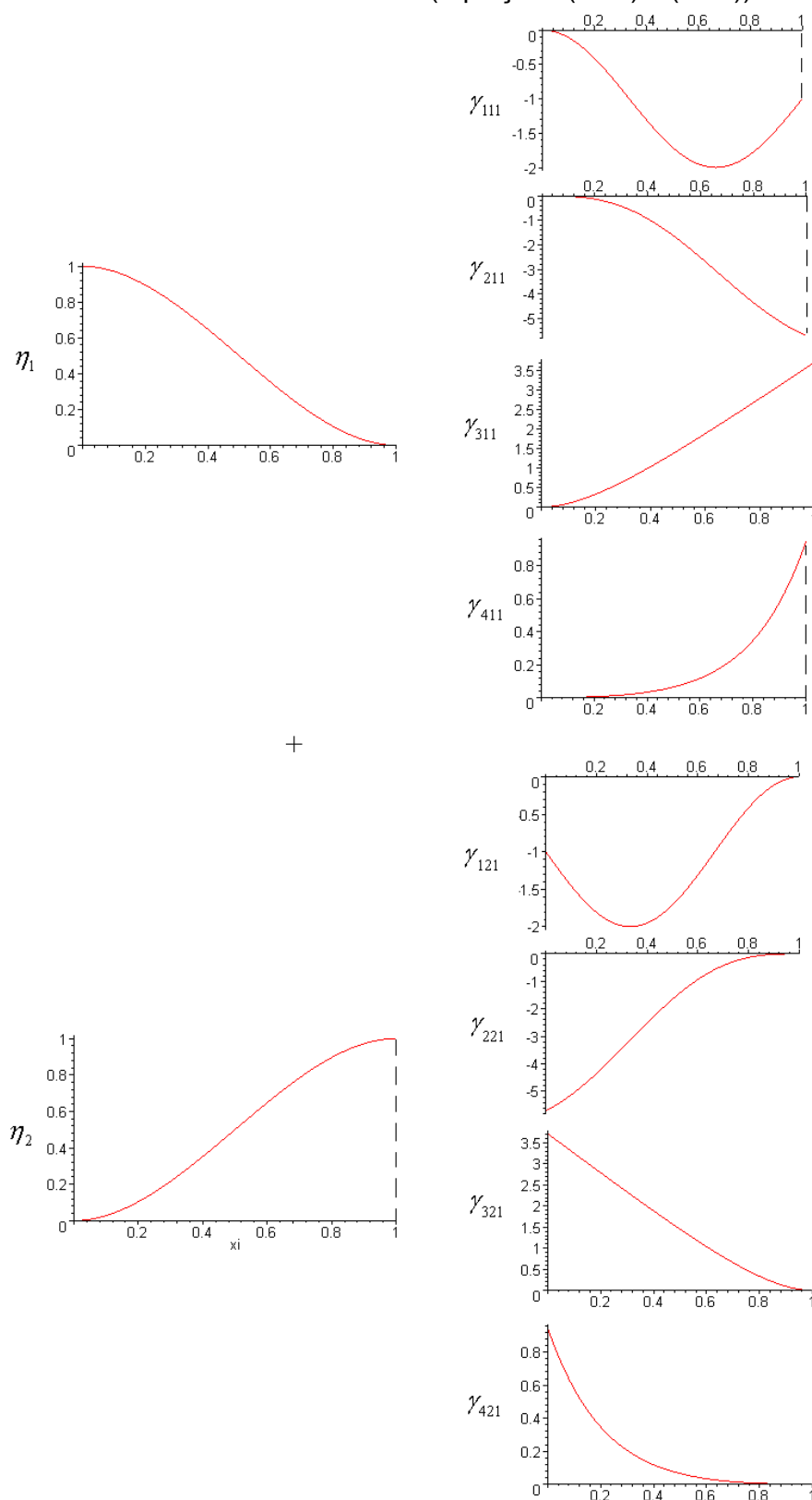


FIGURA 4.11 – FUNÇÕES PARTIÇÃO DA UNIDADE E ENRIQUECEDORAS DO ELEMENTO DE VIGA PARA  $j = 1$ ,  $L_e = 1$  E  $\beta_1 = 3\pi/2$

As funções enriquecedoras (equações (4.65) a (4.74) ou (4.82) a (4.90)) são obtidas a partir da solução fundamental da equação diferencial governante da vibração livre de uma viga uniforme, a fim de incluir algum conhecimento sobre a equação diferencial sendo solucionada. São escolhidas de maneira a garantir que as funções de forma geradas pelo MEFG e suas derivadas primeiras tenham suporte compacto no domínio do elemento, conduzindo então a uma solução com continuidade global. Desta forma, a imposição das condições de contorno segue os mesmos procedimentos do MEF convencional. Estas funções enriquecedoras ainda incorporam propriedades geométricas e mecânicas dos elementos, uma vez que são dependentes do comprimento do elemento e do parâmetro  $\beta_j$ , que por sua vez é função da densidade, do módulo de elasticidade, da área e da inércia do elemento considerado.

Novamente, as funções enriquecedoras e seus respectivos graus de liberdade de campo ( $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  e  $d_{ij}$ ) são associados aos elementos, enquanto os graus de liberdade nodais ( $u_i$  e  $\theta_i$ ) são associados aos nós, como no MEF convencional. Cabe ainda destacar que os graus de liberdade de campo ( $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  e  $d_{ij}$ ) não têm significado físico direto.

O MEFG Adaptativo para análise de vibração livre de vigas permite aumentar iterativamente a precisão de uma frequência (autovalor) alvo. O processo adaptativo é o mesmo empregado para análise de barras, cujo fluxograma com blocos A a H está apresentado na figura 4.6. Neste fluxograma,  $\omega_{\text{alvo}}$  corresponde à frequência relacionada ao modo alvo.

Assim como no MEFG Adaptativo para barras, o primeiro passo do processo adaptativo do MEFG para vigas (blocos A a C) consiste na obtenção de uma primeira aproximação da frequência alvo pelo MEF convencional (MEFG com  $n_l = 0$ ). A malha de elementos finitos usada na análise deve ser refinada o suficiente para capturar uma primeira aproximação da frequência alvo. Para tanto basta utilizar uma malha com número de graus de liberdade ( $ngl$ ) efetivos igual ou maior do que a ordem da frequência alvo e que seja capaz de representar a geometria do problema.

Os passos subsequentes (blocos D a G) consistem na aplicação do MEFG com um nível de enriquecimento ( $n_l = 1$ ) utilizando como frequência  $\mu_j$  ( $j = 1$ , blocos D e E) das funções enriquecedoras (equações (4.82) a (4.90)) a frequência alvo obtida no passo anterior.

O elemento generalizado de pórtico plano é obtido através do mesmo procedimento utilizado pelos métodos enriquecidos e descrito na seção 3.5.2 do capítulo 3.

## 5 VERIFICAÇÕES NUMÉRICAS E APLICAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

Neste capítulo o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é aplicado a problemas com solução analítica conhecida e outros problemas simples de aplicação prática, com diferentes condições de contorno. Estes exemplos são úteis para comparar o desempenho do MEFG, do MEF e de outros métodos enriquecidos. Alguns casos analisados são hipotéticos e as dimensões genéricas, logo, as unidades são omitidas.

Os problemas aqui apresentados são solucionados pelos refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF, pelo refinamento  $c$  do MC e pelo MEFG proposto, a fim de comparar a precisão dos resultados obtidos por cada método. Os resultados de alguns outros métodos aproximados encontrados na literatura também foram discutidos em alguns exemplos.

O número de graus de liberdade considerado em cada análise corresponde ao número total efetivo de graus de liberdade do modelo após a imposição das condições de contorno.

A fim de comparar o desempenho e a taxa de convergência dos métodos numéricos empregados, foram calculados os erros na determinação dos autovalores pela expressão:

$$\|e\| = |\chi_h - \chi| \quad (5.1)$$

onde  $\chi_h$  corresponde ao autovalor aproximado e  $\chi$  ao autovalor analítico. Embora seja possível determinar o erro dos autovetores, observa-se que os estudos de desempenho das análises de vibração livre encontrados na literatura utilizam apenas a norma do erro dos autovalores como parâmetro de comparação.

Como o erro na avaliação dos autovalores cresce com a magnitude do

autovalor considerado (conforme eq. (3.38)), nas análises apresentadas neste trabalho foi utilizado o erro relativo obtido por:

$$erro = \frac{\|e\|}{|\chi|} \quad (5.2)$$

## 5.1 IMPLEMENTAÇÃO DO MEFG

Os métodos aproximados analisados neste trabalho, incluindo o MEFG, foram implementados no software Maple. Devido a limitações do software, não foi possível a análise de estruturas com grande quantidade de barras, como acontece nas estruturas reais. Entretanto, os casos analisados permitem verificar a precisão e eficiência do método proposto antes de aplicá-lo a problemas práticos, implementado em linguagem de programação mais adequada.

Em todos os casos analisados, o problema de autovalores foi solucionado utilizando função intrínseca do Maple, que emprega o método QR.

As integrações necessárias para determinação dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez, para os elementos de barra e eixo, foram realizadas utilizando função intrínseca do Maple. Por outro lado, para os elementos de viga e pórtico, foi necessário utilizar o método da Quadratura de Gauss com dez pontos de integração por intervalo. Para aumentar a precisão da integração numérica, o domínio de cada elemento foi dividido em  $n_l + 3$  subintervalos de integração, onde  $n_l$  corresponde ao número de níveis de enriquecimento utilizados na análise.

Para determinação das soluções analíticas, as equações de frequência foram determinadas e os intervalos contendo as raízes (autovalores) foram isolados por inspeção gráfica. Para determinação das raízes foi utilizado o Método da Falsa Posição implementado também no software Maple.

## 5.2 VIBRAÇÃO LIVRE DE BARRAS RETAS

Os casos analisados a seguir permitem avaliar o desempenho e a precisão do elemento generalizado de barra reta (tipo  $C^0$ ) na análise da vibração axial livre de barras sujeitas a diversas condições de contorno.

### 5.2.1 Barra uniforme fixa-livre

A barra fixa-livre (figura 5.1) com comprimento  $L$ , módulo de elasticidade  $E$ , massa específica  $\rho$  e área da seção transversal  $A$ , tem frequências ( $\omega_r$ ) e modos naturais de vibração ( $u_r$ ) analíticos dados por (CRAIG, 1981):

$$\omega_r = \frac{(2r-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

$$u_r(x) = a \sin\left(\frac{(2r-1)\pi x}{2L}\right) \quad (5.4)$$

sendo  $a$  uma constante.

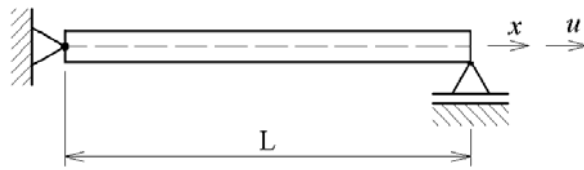


FIGURA 5.1 – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

O autovalor adimensional  $\chi_r$  dado por:

$$\chi_r = \frac{\rho L^2 \omega_r^2}{E} \quad (5.5)$$

é utilizado para comparar a solução analítica com as soluções aproximadas. Os erros relativos das soluções aproximadas são apresentados em escala logarítmica e calculados pelas equações (5.1) e (5.2), sendo  $\chi_h$  o autovalor aproximado obtido pelos métodos numéricos empregados e  $\chi$  o autovalor analítico obtido através das equações (5.3) e (5.5).

#### 5.2.1.1 Refinamento $h$

Inicialmente o problema proposto é analisado utilizando os refinamentos  $h$  do MEF linear e cúbico, do MC e do MEFG. Em todos os métodos é utilizada uma malha uniforme, ou seja, todos os elementos com o mesmo comprimento. No refinamento  $h$  do MC é utilizada apenas uma função enriquecedora e, a partir desta base de funções de forma locais, é executado o refinamento da malha. São analisados os refinamentos  $h$  das duas formas do MEFG denominadas MEFG-1 e MEFG-2, descritas no capítulo 4. O MEFG-1 corresponde à utilização da função enriquecedora idêntica à função de forma enriquecida do MC (equações (4.17) a (4.22)). No MEFG-2 (equações (4.32) a (4.38)) são utilizadas as funções enriquecedoras com parâmetro  $\beta_1 = \pi$ . Nas duas formas analisadas é utilizado apenas um nível de enriquecimento ( $n_l = 1$ ) e então realizado o refinamento da malha.

As figuras 5.2 a 5.7 apresentam os gráficos de evolução do erro relativo dos refinamentos  $h$  dos métodos analisados, para os seis primeiros autovalores, em relação ao número total efetivo de graus de liberdade, ambos em escala logarítmica. Os erros relativos nas análises de barras foram calculados através do software Excel que, devido à limitação no número de dígitos significativos utilizado nos cálculos, impossibilitou a obtenção de valores inferiores a  $10^{-14}$  % para os erros calculados. Sendo assim, nos gráficos a seguir foram considerados apenas os resultados das análises até este patamar de precisão, uma vez que a apresentação de etapas subsequentes de refinamento poderiam ser incorretamente interpretadas como uma estabilização (redução da taxa de convergência) dos métodos.

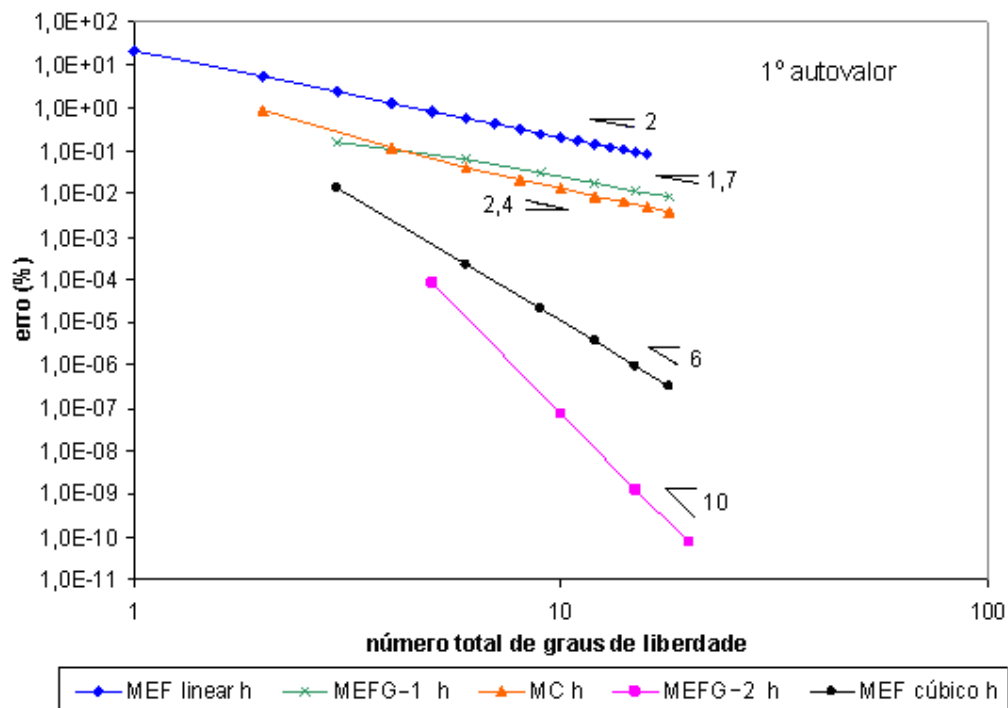


FIGURA 5.2 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $h$  – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

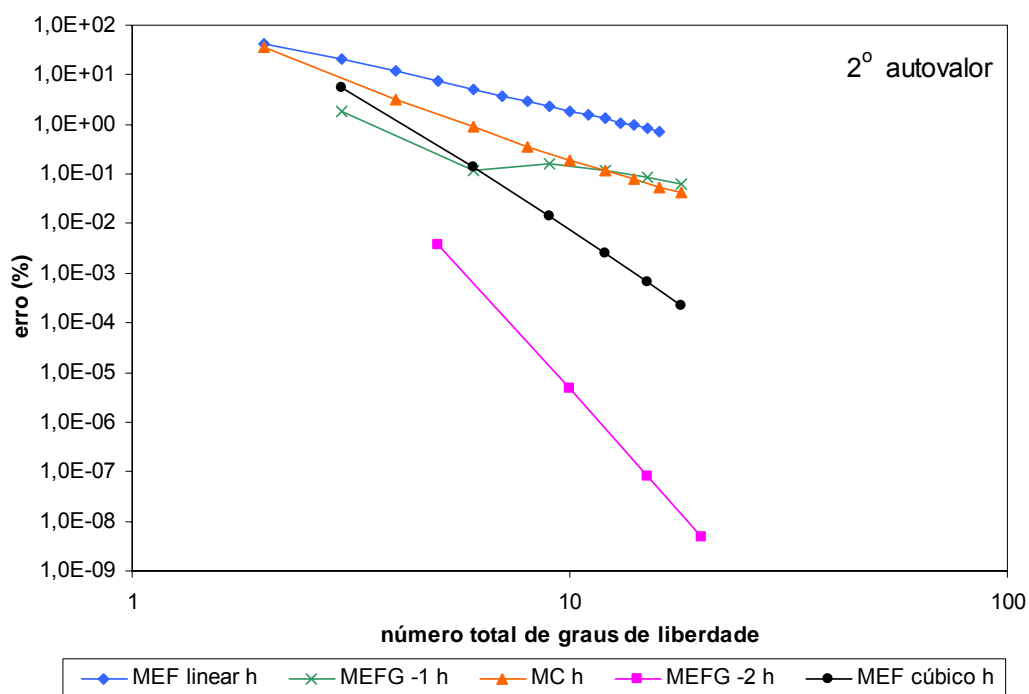


FIGURA 5.3 – ERRO RELATIVO DO 2º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $h$  - BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE



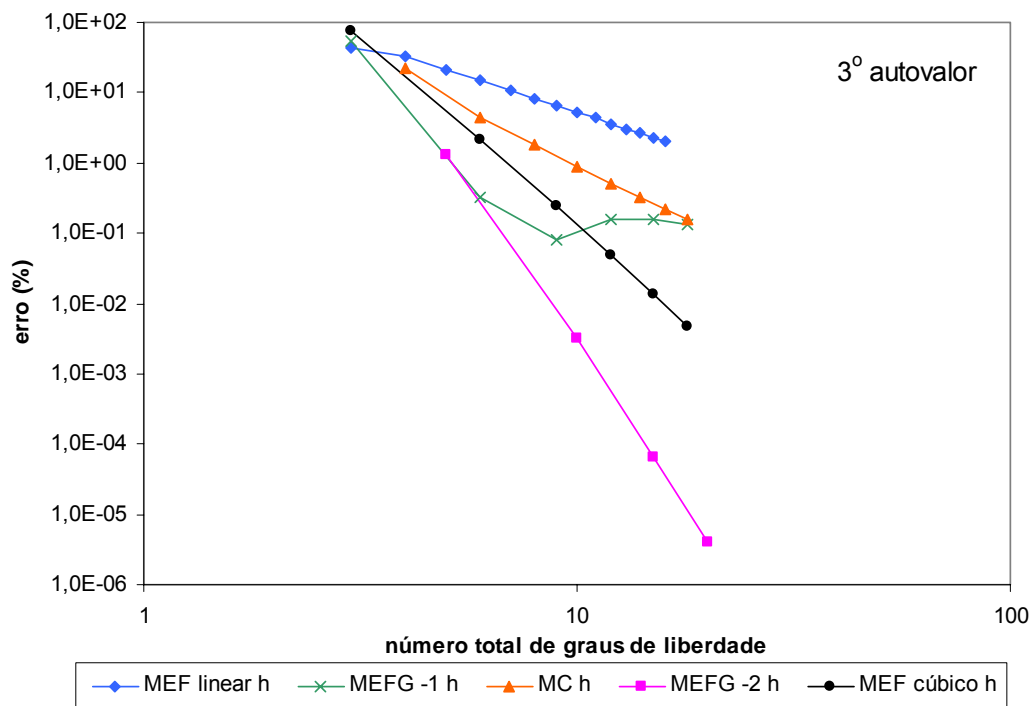


FIGURA 5.4 – ERRO RELATIVO DO 3º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $h$  – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

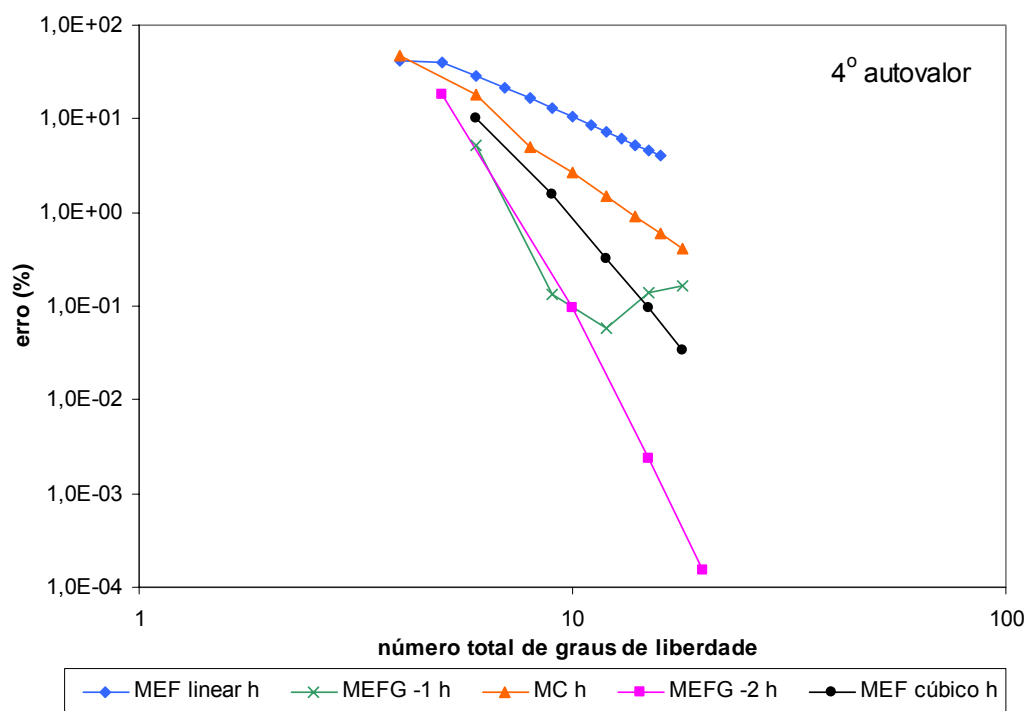


FIGURA 5.5 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $h$  – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

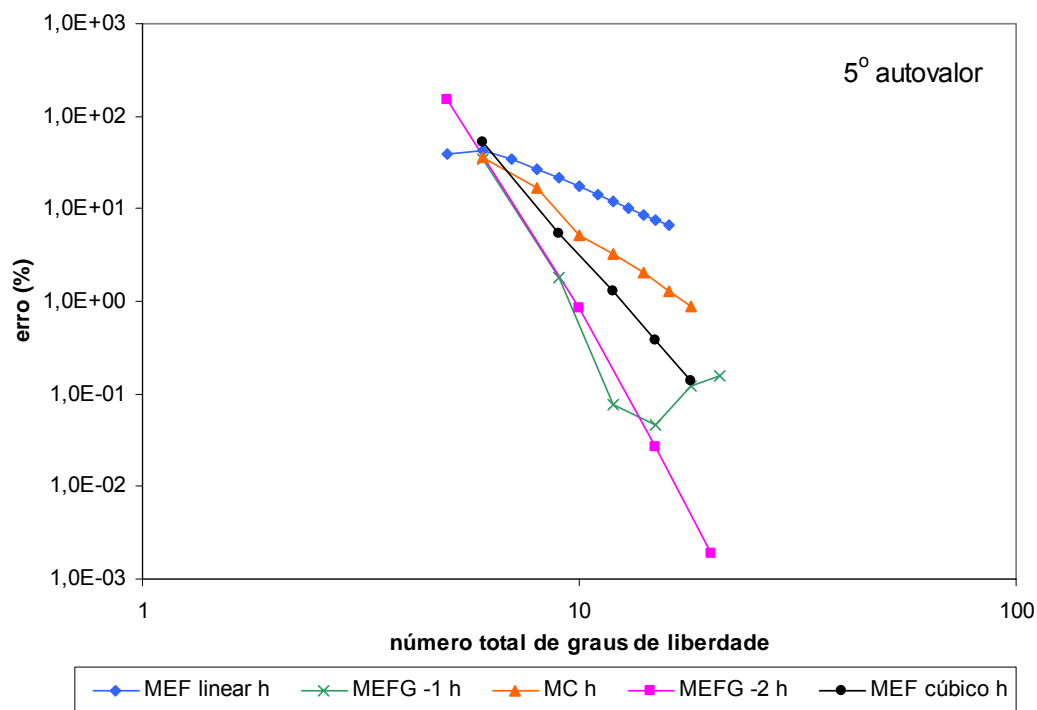


FIGURA 5.6 – ERRO RELATIVO DO 5º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $h$  – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

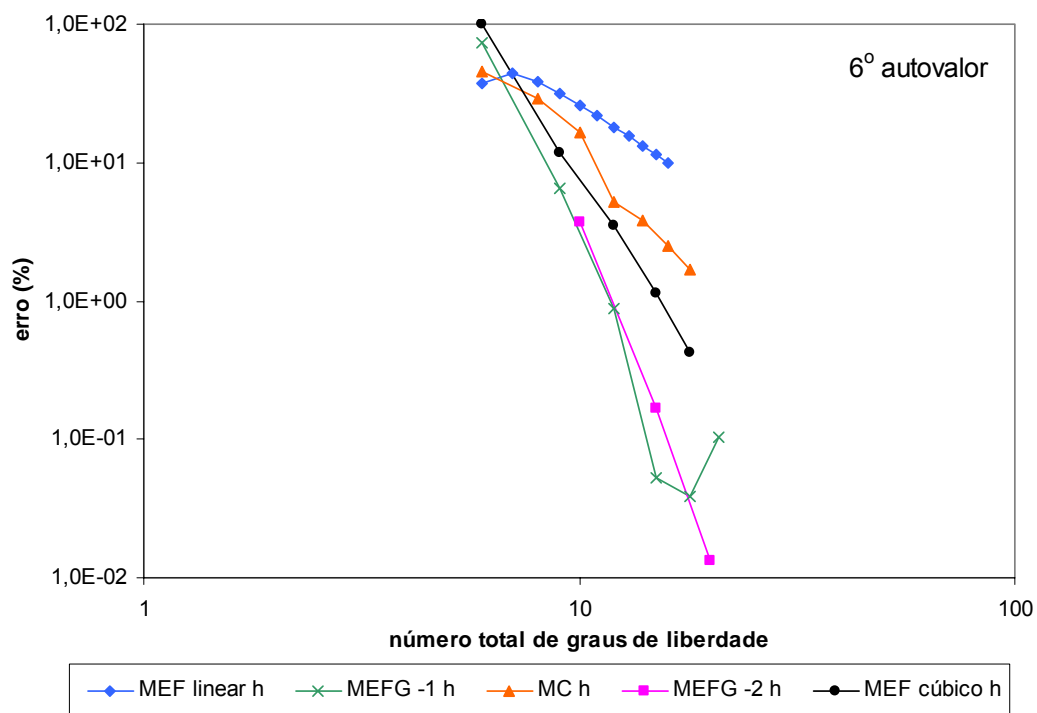


FIGURA 5.7 – ERRO RELATIVO DO 6º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $h$  – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

Observa-se que a linha de tendência do erro relativo nas análises obedece aproximadamente uma lei potencial do tipo:

$$erro = CN^{-\mu} \quad (5.6)$$

onde  $C$  é uma constante,  $N$  corresponde ao número total de graus de liberdade efetivos e  $\mu$  é a taxa de convergência. A tabela 5.1 apresenta as taxas de convergência ( $\mu$ ) observadas para o refinamento  $h$  dos métodos empregados na determinação dos seis primeiros autovalores.

TABELA 5.1 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA DOS REFINAMENTOS  $h$  – BARRA FIXA-LIVRE

Autovalor	MEF linear	MEF cúbico	MC	MEFG-1	MEFG-2
1	2,0	6,0	2,4	1,7	10,0
2	2,0	5,9	3,1	-	9,8
3	2,0	5,8	3,3	-	9,1
4	2,0	5,6	3,2	-	8,4
5	2,0	5,6	3,4	-	8,1
6	2,0	5,4	3,2	-	8,1

De acordo com a estimativa de erro para problemas lineares de autovalores e aproximações polinomiais apresentada no capítulo 3 (eq. (3.38)), o erro na determinação dos autovalores para operador elíptico de 2ª ordem ( $m=1$ ) é da ordem de  $O(N^{-2})$  para o MEF linear ( $k=1$ ) e da ordem de  $O(N^{-6})$  para o MEF cúbico ( $k=3$ ). Observa-se que nas análises realizadas a taxa de convergência (tabela 5.1) do refinamento  $h$  do MEF linear corresponde à taxa estimada pela equação (3.38), porém para o MEF cúbico a taxa apresenta-se um pouco inferior ao estimado e com uma redução em função da ordem do autovalor.

Os resultados mostram que o refinamento  $h$  do MEFG-2 apresenta maior taxa de convergência que os refinamentos  $h$  do MEF e do MC, para todos os autovalores analisados. O refinamento  $h$  do MEFG-1, embora convergente para o 1º autovalor, apresenta um comportamento de estabilização e até divergência para os demais autovalores. O melhor desempenho do MEFG-2 em relação ao MEFG-1 é resultante da utilização no primeiro método de um espaço aproximador mais

completo que o utilizado no MEFG-1.

### 5.2.1.2 Refinamento $p$

Neste tópico são analisadas, além do refinamento  $p$  do MEF e do refinamento  $c$  do MC, as duas formas do MEFG denominadas MEFG-1 e MEFG-2. O refinamento  $p$  do MEFG consiste no aumento do número de funções enriquecedoras, ou seja, aumento progressivo no número de níveis de enriquecimento ( $n_l$ ) para uma malha fixa. No MEFG-2 foi utilizado  $\beta_j = j\pi$  (eq. (4.38)) como parâmetro em cada nível  $j$  de enriquecimento.

As figuras 5.8 a 5.13 apresentam a evolução do erro relativo dos refinamentos  $p$  hierárquicos do MEFG e do MEF, e do refinamento  $c$  do MC, para os seis primeiros autovalores, em relação ao número total de graus de liberdade, ambos em escala logarítmica. Nestas análises são utilizadas malhas formadas por um único elemento.

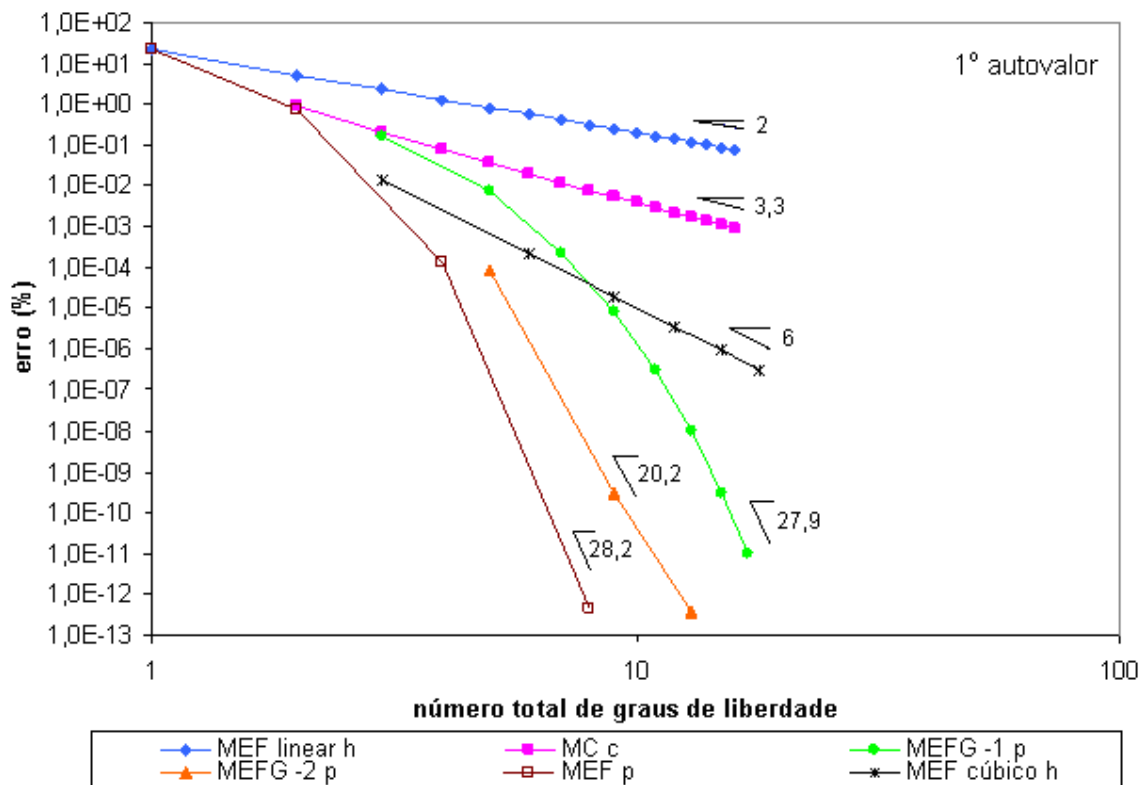


FIGURA 5.8 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

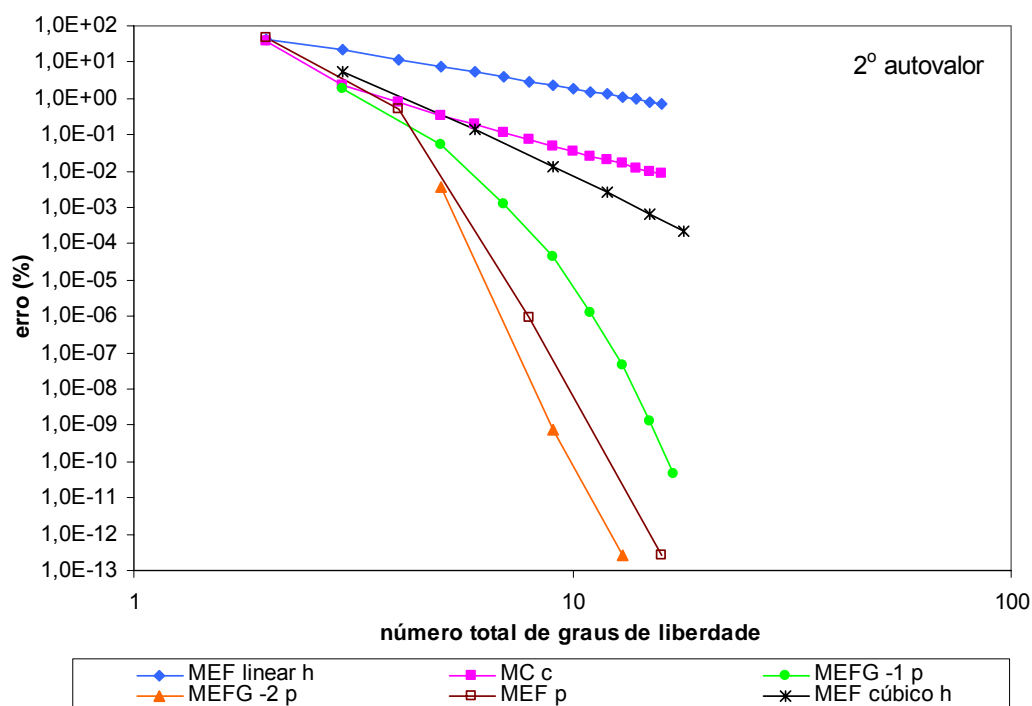


FIGURA 5.9 – ERRO RELATIVO DO 2º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

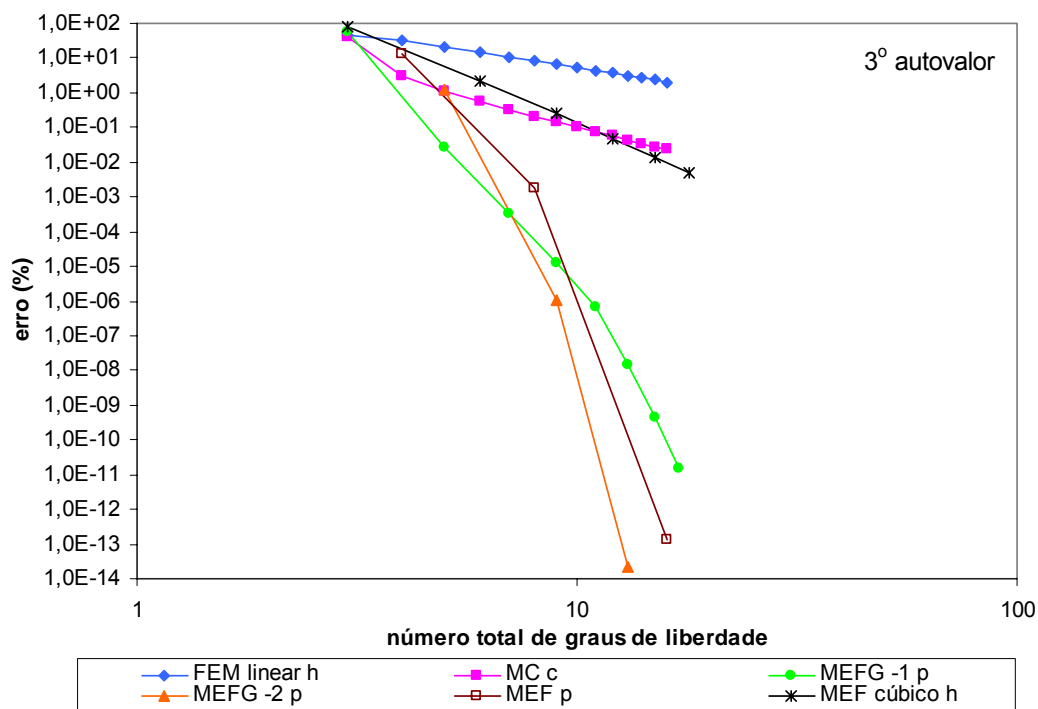


FIGURA 5.10 – ERRO RELATIVO DO 3º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

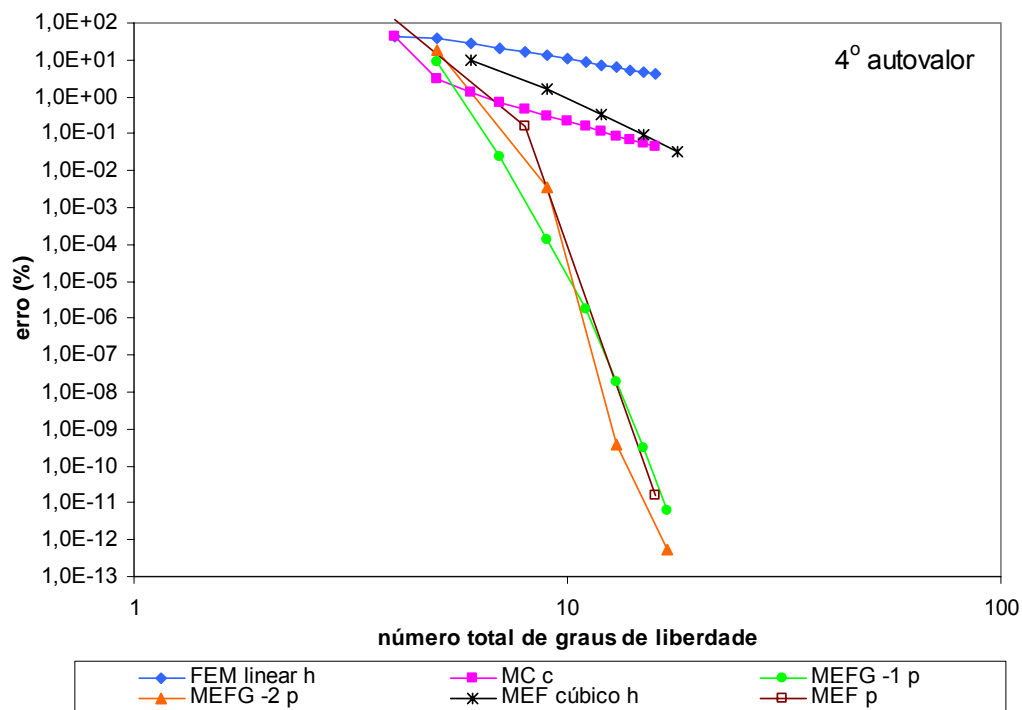


FIGURA 5.11 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

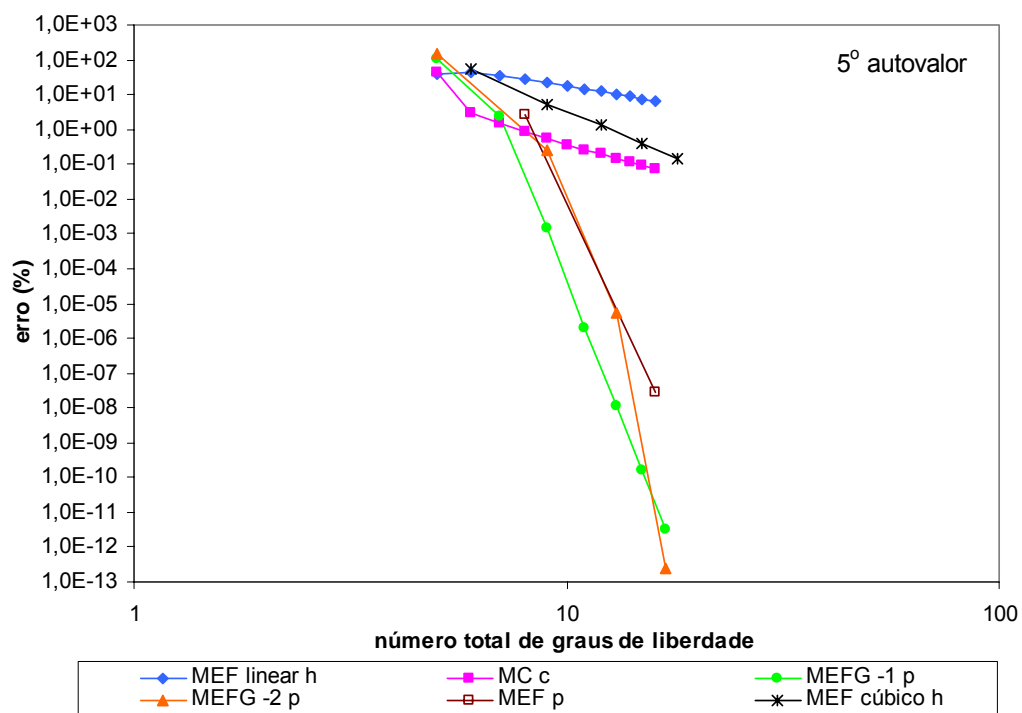


FIGURA 5.12 – ERRO RELATIVO DO 5º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

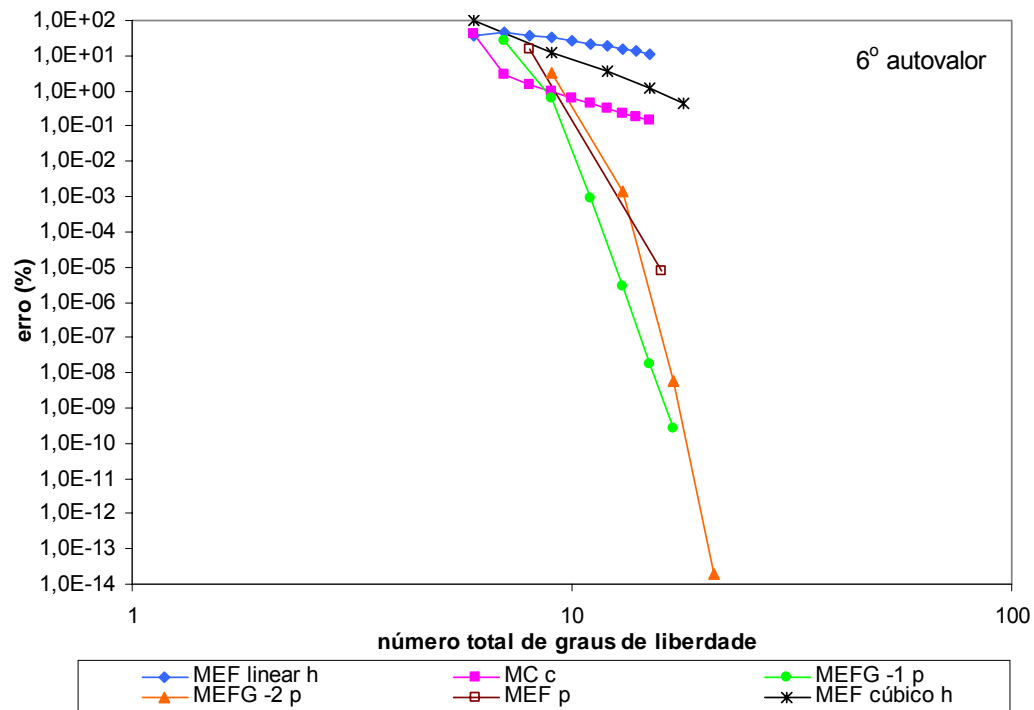


FIGURA 5.13 – ERRO RELATIVO DO 6º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

Os resultados obtidos para a barra fixa-livre mostram que os refinamentos  $p$  das duas formas do MEFG apresentam taxas de convergência maiores que os refinamentos  $h$  do MEF e o refinamento  $c$  do MC, para todos os autovalores analisados. O refinamento hierárquico  $p$  do MEF só supera a precisão dos resultados obtidos pelo MEFG para o primeiro autovalor, onde apresenta também maior taxa de convergência. Nos demais casos o MEFG apresenta resultados mais precisos e taxas de convergência maiores. O MEFG-2 apresenta resultados mais precisos que o MEFG-1 para os quatro primeiros autovalores, estabilizando em erros da ordem de  $10^{-13}$  %. Embora o MEFG-2 apresente erros relativos superiores ao MEFG-1 no início do refinamento para os demais autovalores, no decorrer do refinamento o MEFG-2 apresenta uma aceleração na taxa de convergência, enquanto MEFG-1 mantém uma mesma taxa.

Os resultados obtidos para os refinamentos  $h$  e  $p$  indicam que o MEFG-2 apresenta maior regularidade e excelente taxa de convergência. Portanto, a partir

deste ponto do trabalho são analisados o comportamento e os resultados apenas do MEFG-2, sendo doravante denominado apenas de MEFG.

Observa-se também que, para obter autovalores de ordem mais elevada com boa precisão utilizando o MEFG, é necessário um refinamento com número total de graus de liberdade maior do que o necessário para obter os primeiros autovalores com a mesma precisão. Porém, para todos os autovalores o erro decresce muito rapidamente quando novos níveis de enriquecimento são incorporados ao MEFG.

Para investigar a influência do parâmetro  $\beta_j$  (eq. (4.38)) na convergência do refinamento  $p$  do MEFG foram testados quatro diferentes parâmetros múltiplos de  $\pi/3$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi$  e  $3\pi/2$ . Os resultados destes testes para o primeiro e para o quarto autovalores são apresentados nas figuras 5.14 e 5.15.

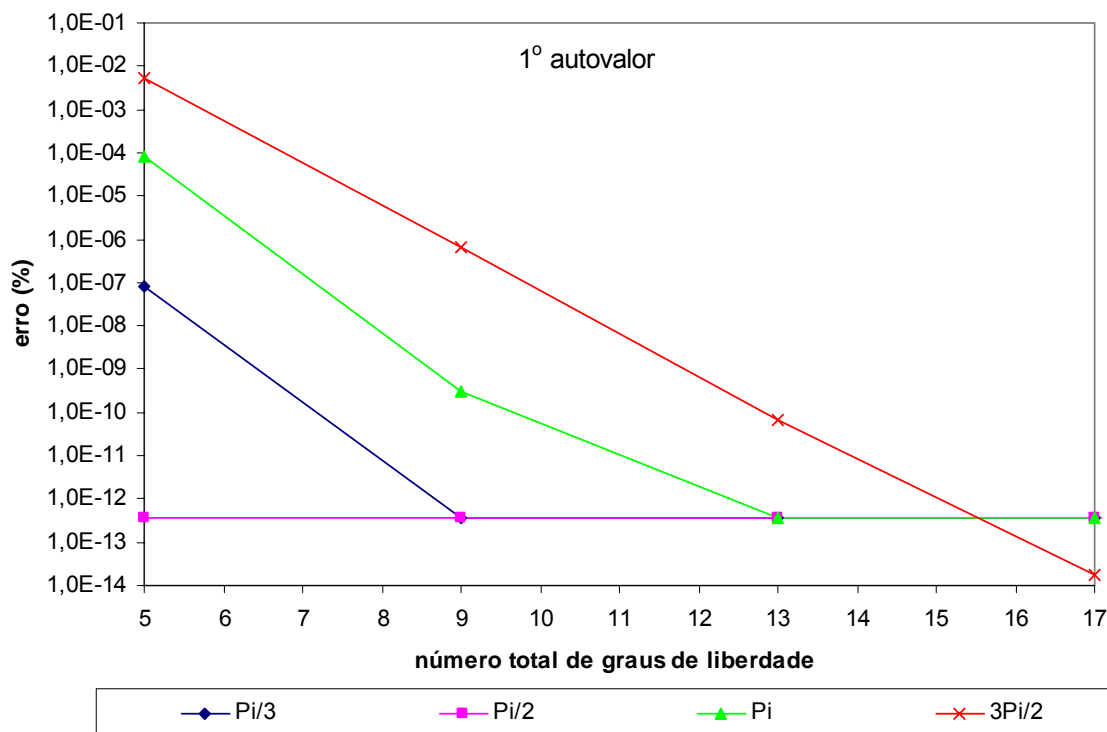


FIGURA 5.14 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DE FREQUÊNCIA – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE



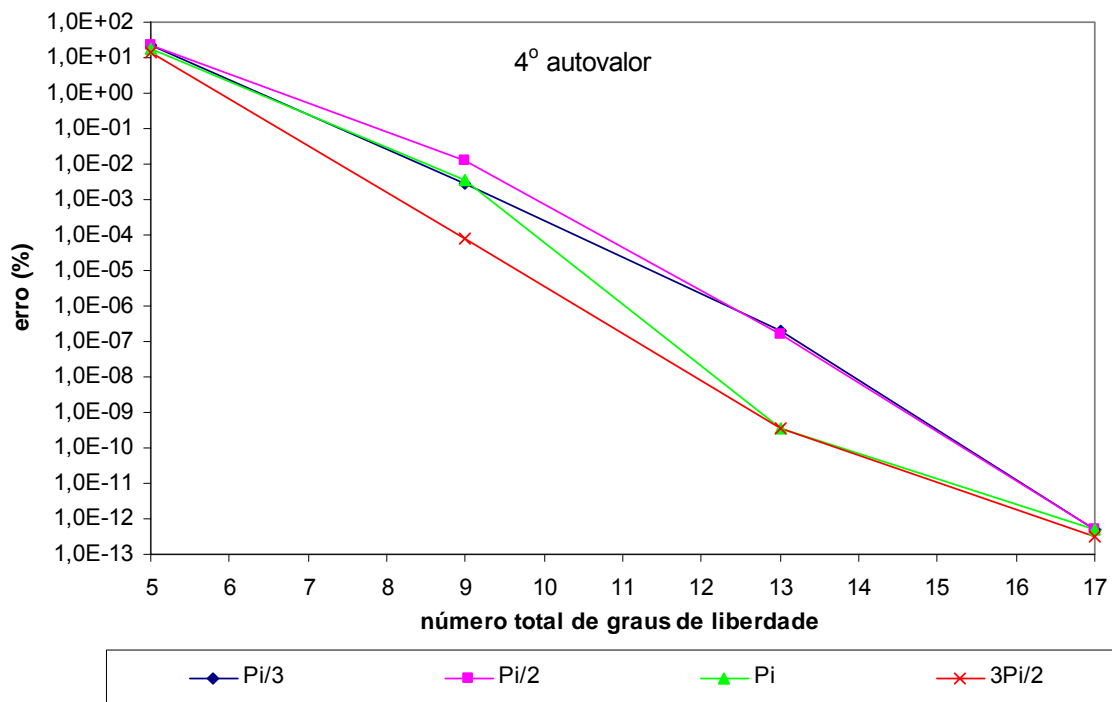


FIGURA 5.15 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DE FREQUÊNCIA – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

Embora as análises mostrem-se todas convergentes, verifica-se que o comportamento do refinamento  $p$  do método depende do parâmetro de frequência  $\beta_j$  escolhido e da ordem do autovalor analisado. Na determinação do 1º autovalor quando  $\beta_j = j.\pi/2$  o método permaneceu estável com erro de  $3,78 \times 10^{-13} \%$  porque  $\beta_1 = \pi/2$  corresponde exatamente à primeira frequência de vibração da barra analisada. Isto reforça a hipótese de um método iterativo adaptativo convergente para a solução exata do problema. O método adaptativo proposto neste trabalho é analisado a seguir.

#### 5.2.1.3 Refinamento adaptativo

Neste tópico é analisado o desempenho do método de refinamento adaptativo iterativo do MEFG.

#### 5.2.1.3.1 Verificação da estabilidade e convergência do método

Inicialmente, para verificar a estabilidade e a convergência do refinamento adaptativo proposto (figura 4.6), foram realizados ensaios prévios de sensibilidade de convergência variando-se o parâmetro  $\beta_1$  inicial (eq. (4.38)) de 1 a 47 em cada análise, para malhas de um e dois elementos, na determinação dos cinco primeiros autovalores da barra. Os resultados destes ensaios são descritos resumidamente a seguir.

Com a malha formada por um único elemento, apenas as análises em busca dos dois primeiros autovalores foram convergentes para todos os parâmetros iniciais testados ( $\beta_1$  variando entre 1 a 47). A análise tendo como alvo o terceiro autovalor foi convergente apenas para parâmetros iniciais entre um e sete. Para alvos a partir do quarto autovalor não houve convergência das análises para nenhum parâmetro inicial. Para malhas com dois elementos houve convergência nas buscas dos quatro primeiros autovalores para todos os parâmetros iniciais. Já a análise tendo como alvo o quinto autovalor com malha de dois elementos mostrou-se convergente apenas para parâmetros iniciais entre 11 e 13.

Observou-se nestes testes que as análises adaptativas são estáveis e convergentes sempre que se utiliza uma malha com número de graus de liberdade igual ou superior à ordem da frequência desejada (alvo) e parâmetro de frequência inicial ( $\beta_1$ ) igual à aproximação do MEF para a frequência alvo. Este resultado reforça a hipótese de estabilidade do processo adaptativo conforme apresentado no capítulo 4 (figura 4.6), onde a primeira iteração corresponde a uma análise do MEF (MEFG com  $n_l = 0$ ) e as demais utilizam a mesma malha inicial, porém executando análises pelo MEFG Adaptativo com um nível de enriquecimento ( $n_l = 1$ ).

#### 5.2.1.3.2 Verificação do desempenho do método

Para avaliar o desempenho do MEFG Adaptativo, quatro diferentes análises com malha uniforme são realizadas a fim de obter as primeiras quatro frequências

naturais da barra. Em cada análise adaptativa são utilizados apenas um nível de enriquecimento ( $n_l = 1$ ) e, em particular neste exemplo, funções enriquecedoras  $\varphi_{il}$  sem subtração da unidade, ou seja:

$$\varphi_{11} = \cos(\beta_1 L_e \xi) \quad (5.7)$$

$$\varphi_{21} = \cos(\beta_1 L_e (\xi - 1)) \quad (5.8)$$

Neste caso é necessário anular o coeficiente  $b_{11}$  (eq. (4.33)) para garantir a condição de deslocamento impedido na extremidade esquerda da barra. Esta imposição seria desnecessária caso fossem utilizadas as funções enriquecedoras com subtração da unidade (eqs. (4.36) e (4.37))

A evolução do erro relativo em cada análise é apresentada nas figuras 5.16 a 5.19. Para capturar uma primeira aproximação da frequência alvo, para a primeira frequência (figura 5.16), a malha de elementos finitos deve ter no mínimo um elemento (um grau de liberdade efetivo), para a segunda frequência (figura 5.17), a malha deve ter no mínimo dois elementos (dois graus de liberdade efetivos), e assim por diante.

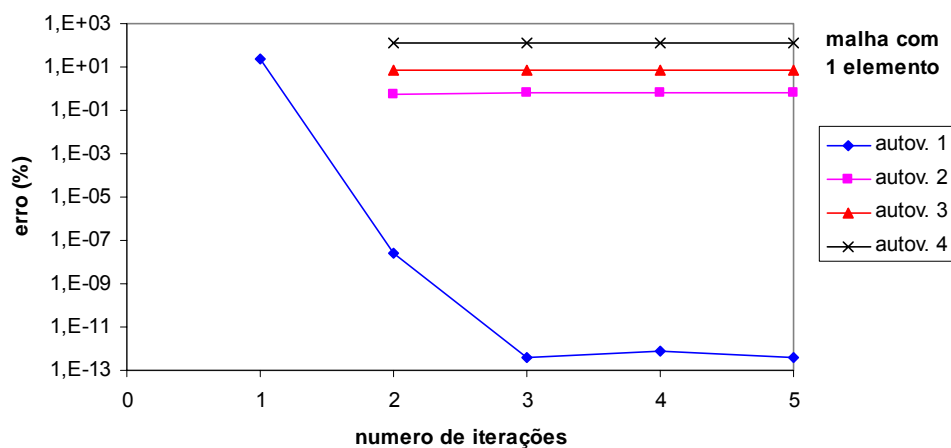


FIGURA 5.16 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE – ANÁLISE 1: 1ª FREQUÊNCIA ALVO

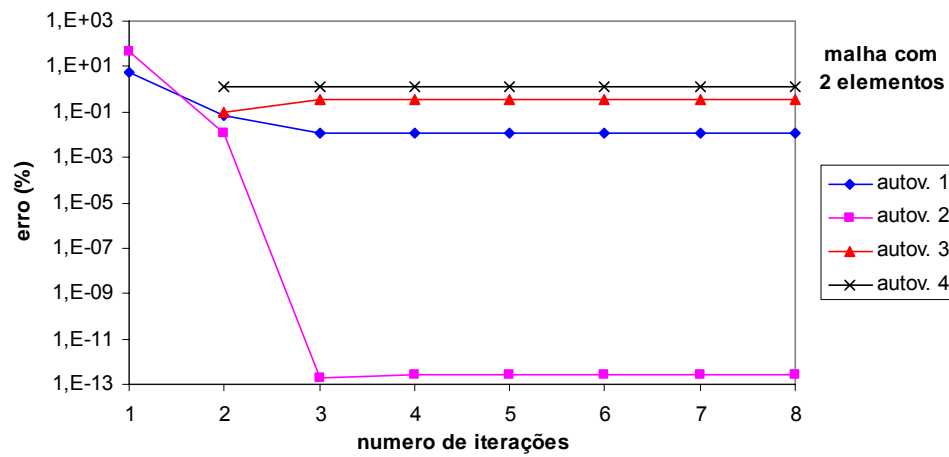


FIGURA 5.17 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE – ANÁLISE 2: 2ª FREQUÊNCIA ALVO

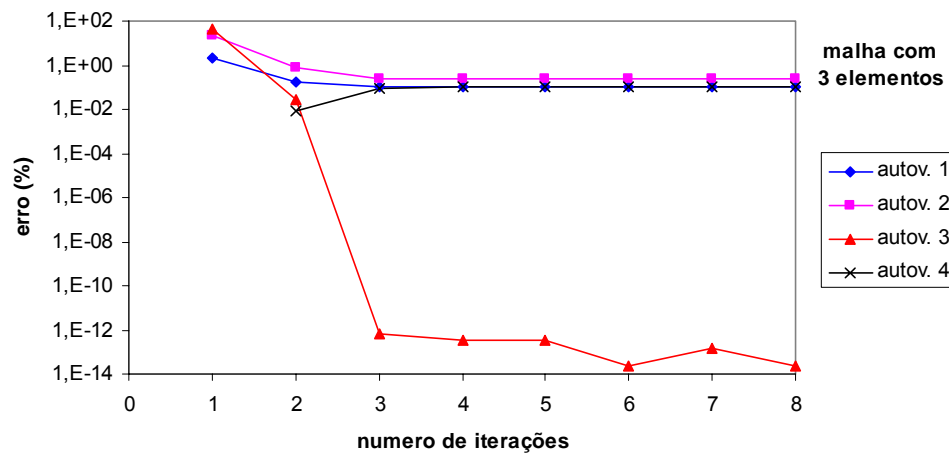


FIGURA 5.18 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE – ANÁLISE 3: 3ª FREQUÊNCIA ALVO

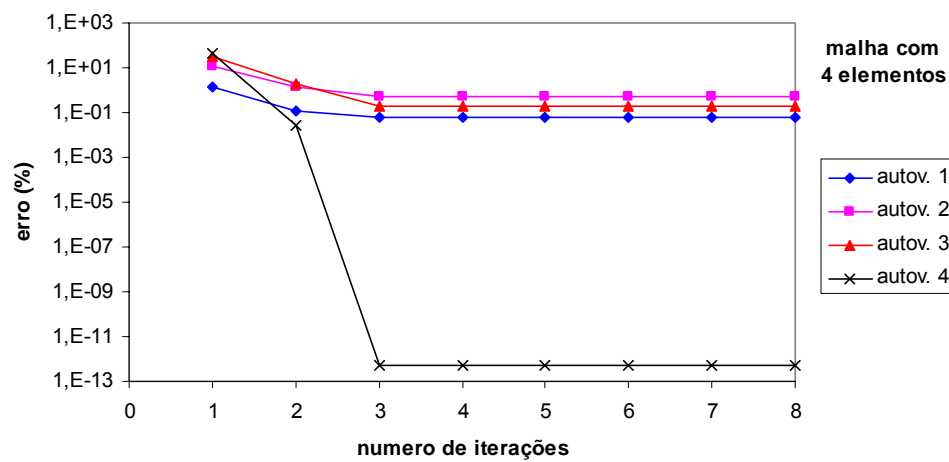


FIGURA 5.19 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE – ANÁLISE 4: 4ª FREQUÊNCIA ALVO

Observa-se que o processo adaptativo converge rapidamente, requerendo apenas três iterações para obter cada autovalor alvo com precisão da ordem de  $10^{-13}$  %. Em cada análise são obtidas tantas frequências quantos são os graus de liberdade efetivos do modelo. Entretanto, os resultados mostram que cada análise adaptativa permite melhorar a precisão da solução para a frequência alvo, não provocando nenhum efeito sobre a precisão da solução das outras frequências. Por exemplo, na análise 4 (figura 5.19), o autovalor alvo (correspondente à quarta frequência) atinge precisão da ordem de  $10^{-13}$  % após três iterações enquanto os primeiros três autovalores atingem precisão da ordem de  $10^{-1}$  %. Deve-se salientar que as malhas utilizadas nas análises das figuras 5.16 a 5.19 são diferentes entre si pois, cada uma delas corresponde à malha com o mínimo número de graus de liberdade necessário para capturar o correspondente modo de vibração.

A tabela 5.2 apresenta os erros relativos obtidos pelos métodos numéricos empregados nas análises. A solução pelo MEF linear  $h$  é obtida com 100 elementos lineares, ou seja, 100 graus de liberdade efetivos. Já na análise pelo MEF cúbico  $h$  são empregados 20 elementos cúbicos, ou seja, 60 graus de liberdade. O MEF  $p$  empregado utiliza um elemento hierárquico de 17 nós (funções de forma polinomiais até o grau 16), correspondendo a 16 graus de liberdade. O MC também utiliza apenas um elemento e 15 funções enriquecedoras, que correspondem a um grau de liberdade nodal e 15 graus de liberdade de campo. As análises pelo MEFG Adaptativo utilizam não mais que 13 graus de liberdade por iteração. Por exemplo, o quarto autovalor é obtido utilizando-se quatro graus de liberdade na primeira iteração e 13 graus de liberdade nas duas iterações subsequentes. Para fins de comparação, na tabela 5.2 foram utilizados os erros relativos do MEFG Adaptativo após a 3ª iteração, uma vez que estes não sofrem variações significativas a partir deste ponto do processo iterativo, conforme observado nas figuras 5.16 a 5.19.

TABELA 5.2 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DA BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

Autovalor	MEF linear $h$ (100e) ngl <sup>(a)</sup> = 100	MEF cúbico $h$ (20e) ngl = 60	MEF $p$ (1e 17n) ngl = 16	MC (1e 15c) ngl = 16	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(b)</sup>
1	2,056 e-3	8,564 e-10	3,780 e-13	8,936 e-4	3,780 e-13	1x 1 gl + 2x 4 gl
2	1,851 e-2	1,694 e-7	2,560 e-13	8,188 e-3	1,920 e-13	1x 2 gl + 2x 7 gl
3	5,141 e-2	3,619 e-6	1,382 e-13	2,299 e-2	6,335 e-13	1x 3 gl + 2x 10 gl
4	1,008 e-1	2,711 e-5	1,602 e-11	4,579 e-2	5,289 e-13	1x 4 gl + 2x 13 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;  
 (b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Para a barra uniforme fixa-livre, observa-se que o MEFG Adaptativo atinge maior precisão que os refinamentos  $h$  do MEF e refinamento  $c$  do MC. O refinamento  $p$  hierárquico do MEF apenas apresenta resultado com precisão um pouco melhor que o MEFG Adaptativo para o terceiro autovalor, porém com 16 graus de liberdade, enquanto são utilizados 13 graus de liberdade nas iterações do MEFG.

Cabe ressaltar também que a utilização de malhas mais refinadas nas análises do MEFG Adaptativo produz resultados mais precisos. Porém, como os erros relativos obtidos nas análises de barras, com malhas com o número mínimo de graus de liberdade, já se encontram no limite de precisão possível de se observar com o software Excel, a melhora dos resultados com o refinamento da malha não seria observável.

Para fins de comparação, utilizando o software comercial Ansys v. 9.0, os quatro primeiros autovalores desta barra atingem precisão similar à obtida com o MEFG Adaptativo quando se empregam na análise 410 elementos de treliça (LINK8), que correspondem a 410 graus de liberdade efetivos.

A fim de investigar a influência do tamanho dos elementos na convergência do processo adaptativo, foram realizadas análises adicionais buscando uma melhor precisão para o segundo autovalor a partir de uma malha de elementos finitos composta por dois elementos, alterando-se a relação entre o comprimento dos elementos  $L_1:L_2$ , sendo  $L_1$  e  $L_2$  os comprimentos do primeiro e do segundo

elementos, respectivamente. A figura 5.20 apresenta o erro relativo nestas análises em função do número de iterações para diversas relações  $L_1:L_2$ .

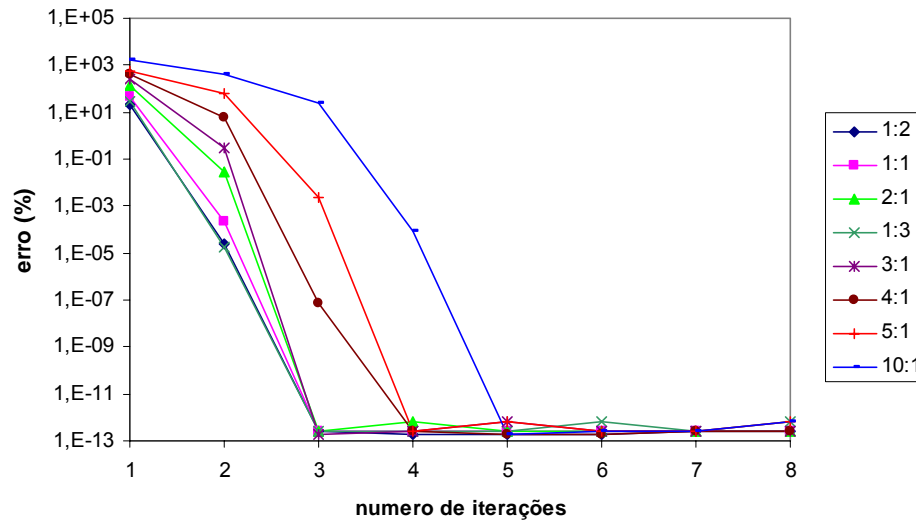


FIGURA 5.20 – ERRO RELATIVO PARA O 2º AUTOVALOR PARA DIVERSAS RELAÇÕES DE MALHA – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

Observa-se que todas as relações analisadas foram convergentes, porém a malha uniforme é uma das que requer menor número de iterações.

#### 5.2.1.4 Refinamento $p$ Adaptativo

Também é possível combinar a técnica adaptativa ao refinamento  $p$  do MEFG. As figuras 5.21 a 5.26 apresentam a evolução do erro relativo com a aplicação do refinamento  $p$  adaptativo do MEFG para uma malha formada por um único elemento. Na primeira etapa do refinamento  $p$  adaptativo do MEFG é utilizado o MEF (MEFG com  $n_l = 0$ ). Na segunda etapa é acrescentado o primeiro nível de enriquecimento ( $n_l = 1$ ) com parâmetro  $\beta_l$  igual à primeira frequência obtida pelo MEF na primeira etapa e então realizada uma iteração de adaptatividade. A partir da terceira fase não são utilizadas iterações de adaptatividade intermediárias, apenas uma análise em cada fase com acréscimo de mais um nível de enriquecimento utilizando como novo parâmetro  $\beta_i$  a frequência correspondente da etapa anterior.

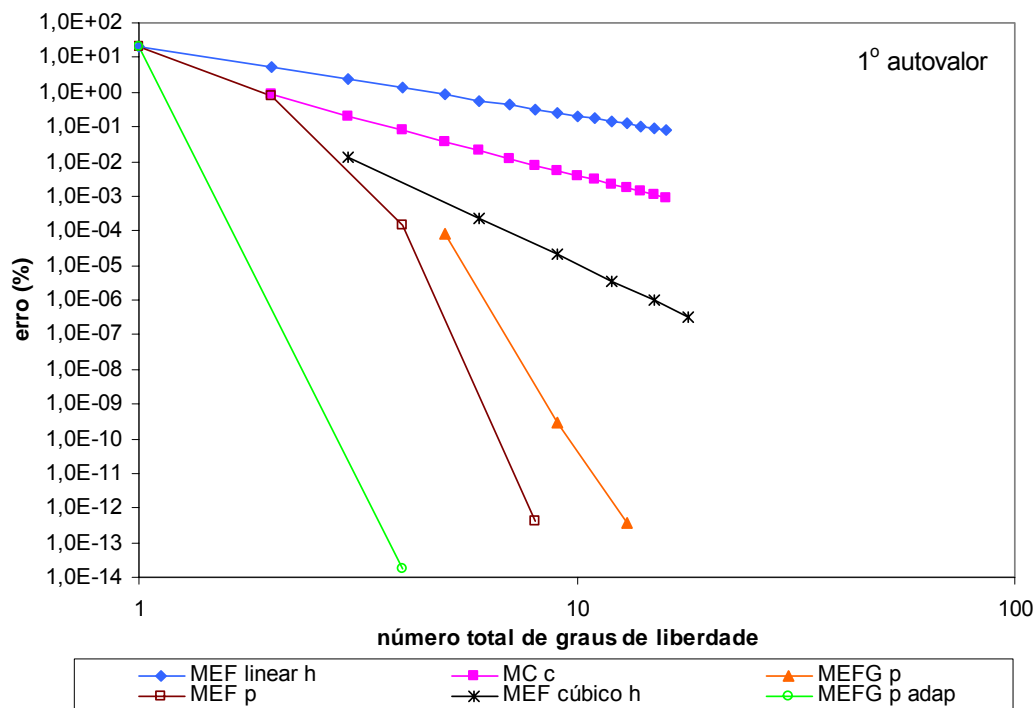


FIGURA 5.21 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  ADAPTATIVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

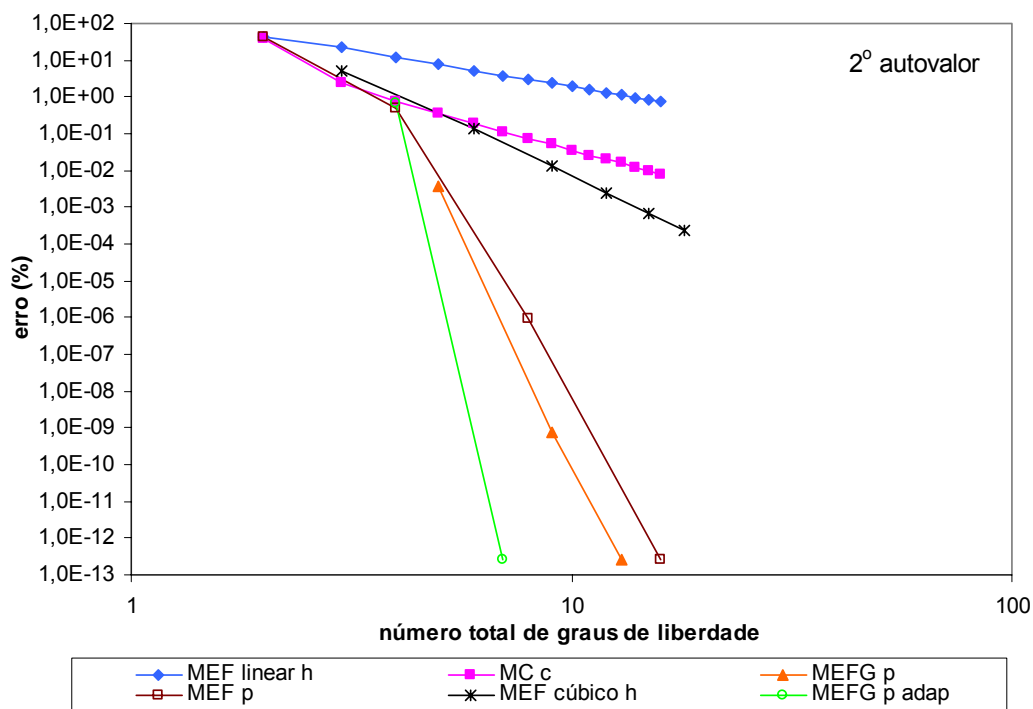


FIGURA 5.22 – ERRO RELATIVO DO 2º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  ADAPTATIVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE



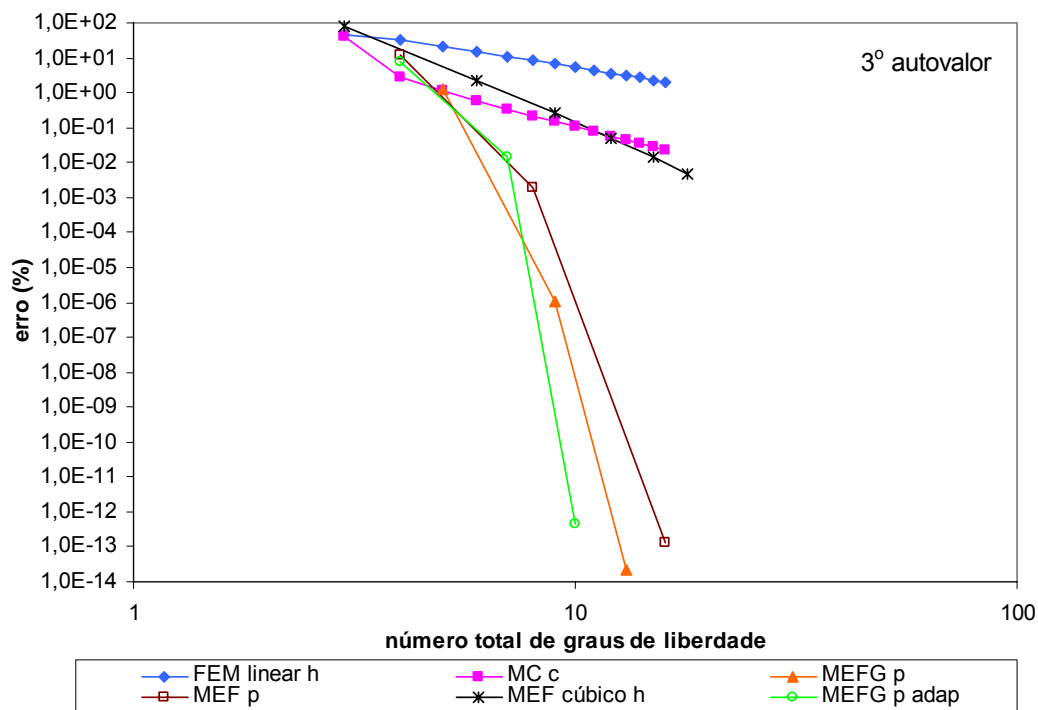


FIGURA 5.23 – ERRO RELATIVO DO 3º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  ADAPTATIVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

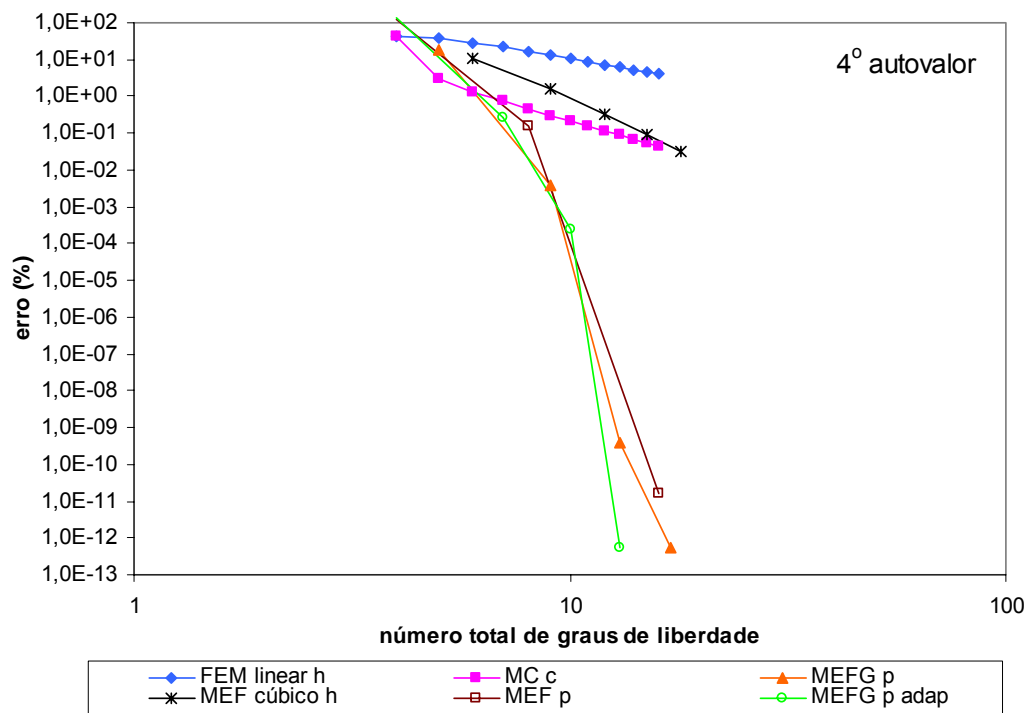


FIGURA 5.24 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  ADAPTATIVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

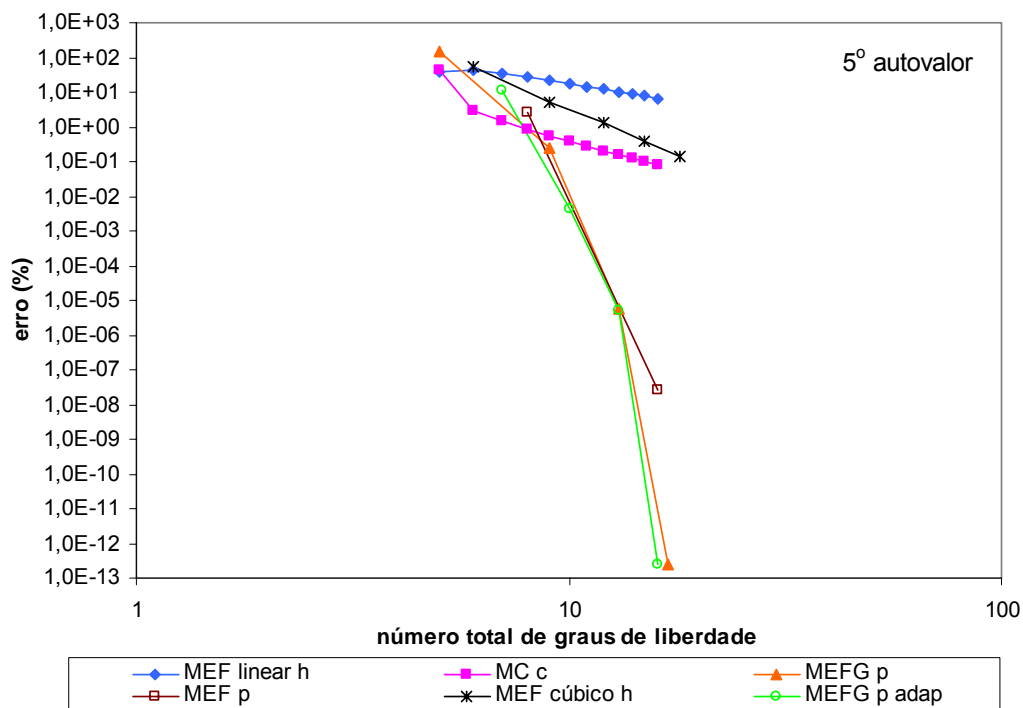


FIGURA 5.25 – ERRO RELATIVO DO 5º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  ADAPTATIVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

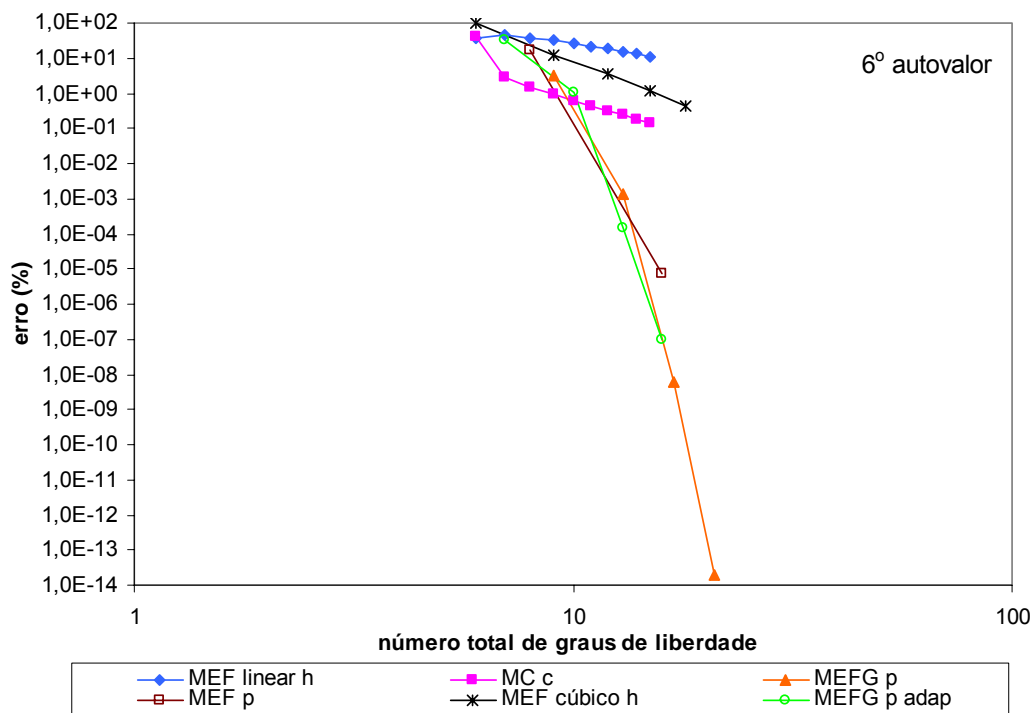


FIGURA 5.26 – ERRO RELATIVO DO 6º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  ADAPTATIVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE

O refinamento  $p$  adaptativo do MEFG obtido pelo aumento do número de níveis de enriquecimento a cada iteração do processo adaptativo, como descrito no parágrafo anterior, apresenta taxas de convergência maiores que o MEFG  $p$  para os dois primeiros autovalores e taxas similares ao MEFG  $p$  para os demais. Cabe lembrar que o MEFG  $p$  consiste no aumento progressivo do número de níveis de enriquecimento ( $n_l$ ) para uma malha fixa, utilizando  $\beta_j = j\pi$  (eq. (4.38)) como parâmetro em cada nível  $j$  de enriquecimento.

Devido à potencialidade de aplicação observada no MEFG Adaptativo, os próximos exemplos são dedicados à análise do desempenho deste método com relação ao MEF e a outros métodos numéricos encontrados na literatura.

### 5.2.2 Barra uniforme fixa-fixa

A barra de seção transversal uniforme fixa-fixa (figura 5.27), com comprimento  $L$ , módulo de elasticidade  $E$ , massa específica  $\rho$  e área da seção transversal  $A$ , tem frequências ( $\omega_r$ ) e modos naturais ( $u_r$ ) de vibração analíticos:

$$\omega_r = \frac{r\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

$$u_r(x) = a \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \quad (5.10)$$

sendo  $a$  uma constante.

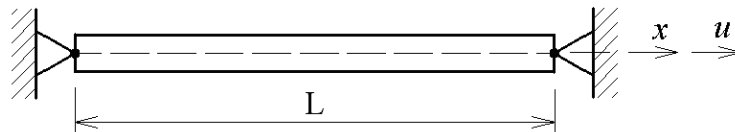


FIGURA 5.27 – BARRA UNIFORME FIXA-FIXA

O autovalor adimensional  $\chi_r$  da equação (5.5) é novamente utilizado para comparar a solução analítica com as soluções aproximadas.

Quatro diferentes análises do MEFG Adaptativo com malha uniforme são realizadas a fim de obter as primeiras quatro frequências naturais da barra. Neste exemplo, para capturar uma primeira aproximação da frequência alvo, para a primeira frequência, a malha de elementos finitos deve ter no mínimo dois elementos (um grau de liberdade efetivo), para a segunda frequência, a malha deve ter no mínimo três elementos (dois graus de liberdade efetivos), e assim por diante. Em todos os casos analisados neste trabalho, em que se aplica o elemento generalizado de barra, verifica-se que as análises adaptativas têm comportamento semelhante ao descrito no exemplo 5.2.1 e apresentado nas figuras 5.16 a 5.19, ou seja, não têm efeito algum sobre a precisão das frequências que não correspondem à frequência alvo. Desta forma, a partir deste exemplo, é apresentada apenas a evolução do erro relativo dos autovalores alvo nas análises adaptativas (figura 5.28).

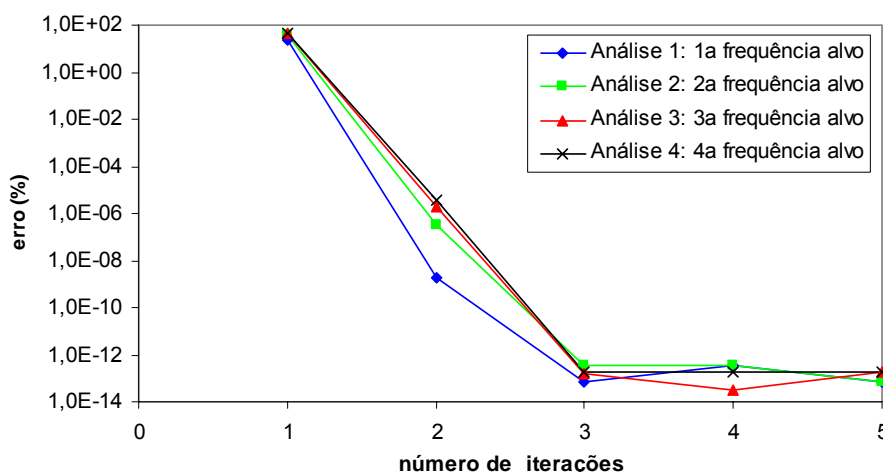


FIGURA 5.28 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – BARRA UNIFORME FIXA-FIXA

Observa-se novamente que, em todas as análises o erro relativo do autovalor alvo diminui rapidamente e a partir da terceira iteração estabiliza-se com valor inferior a  $10^{-12}$  %.

A tabela 5.3 apresenta os erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos numéricos empregados nas análises. A solução pelo MEF linear  $h$  é obtida com 100 elementos lineares, ou seja, 100 graus de liberdade efetivos. Já na análise

pelo MEF cúbico  $h$  são empregados 33 elementos cúbicos, ou seja, 98 graus de liberdade. O MEF  $p$  utiliza um elemento hierárquico de 33 nós (funções de forma polinomiais até o grau 32), correspondendo a 31 graus de liberdade. O MC também utiliza apenas um elemento e 16 funções enriquecedoras, que correspondem a 16 graus de liberdade de campo. As análises pelo MEFG Adaptativo utilizam não mais que 24 graus de liberdade por iteração. Por exemplo, o quarto autovalor é obtido utilizando-se quatro graus de liberdade na primeira iteração e 24 graus de liberdade nas duas iterações subsequentes.

TABELA 5.3 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE BARRA UNIFORME FIXA-FIXA

Autovalor	MEF linear $h$ (100e) ngl <sup>(a)</sup> = 99	MEF cúbico $h$ (33e) ngl = 98	MEF $p$ (1e 33n) ngl = 31	MC $c$ (1e 16c) ngl = 16	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(b)</sup>
1	8,225 e-3	5,432 e-10	1,800 e-13	7,199 e-14	7,199 e-14	1x 1 gl + 2x 9 gl
2	3,290 e-2	4,715 e-8	1,655 e-8	7,199 e-14	3,420 e-13	1x 2 gl + 2x 14 gl
3	7,404 e-2	5,368 e-7	3,504 e-8	3,200 e-14	1,440 e-13	1x 3 gl + 2x 19 gl
4	1,317 e-1	3,010 e-6	1,689 e-8	4,680 e-13	1,800 e-13	1x 4 gl + 2x 24 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;

(b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Observa-se que, embora o MEFG Adaptativo exija a solução iterativa do problema, o número de iterações é pequeno e a precisão alcançada é maior do que a obtida pelos refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF com número de graus de liberdade superior. A excelente precisão alcançada pelo refinamento  $c$  do MC neste caso particular é esperada, uma vez que as funções enriquecedoras utilizadas coincidem com a solução analítica do problema.

### 5.2.3 Barra uniforme livre-livre

Uma barra de seção transversal uniforme livre-livre (figura 5.29), com comprimento  $L$ , módulo de elasticidade  $E$ , massa específica  $\rho$  e área da seção transversal  $A$ , tem frequências ( $\omega_r$ ) e modos naturais ( $u_r$ ) de vibração axial analíticos (INMAN, 1996) :

$$\omega_r = \frac{(r-1)\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad , \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

$$u_r(x) = a \cos\left(\frac{(r-1)\pi x}{L}\right) \quad (5.12)$$

sendo  $a$  uma constante. Verifica-se ainda que a solução para  $r = 1$  corresponde ao movimento de corpo rígido  $u_1 = a$  com  $\omega_1 = 0$ .

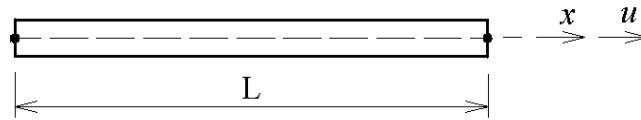


FIGURA 5.29 – BARRA UNIFORME LIVRE-LIVRE

Novamente o autovalor adimensional  $\chi_r$  da equação (5.5) é utilizado na determinação do erro relativo das soluções aproximadas.

Três diferentes análises do MEFG Adaptativo com malha uniforme são executadas a fim de obter a segunda, terceira e quarta frequências naturais da barra, uma vez que  $\omega_1 = 0$ . Neste exemplo, para capturar uma primeira aproximação da frequência alvo, para a segunda frequência, a malha de elementos finitos deve ter no mínimo um elemento (dois graus de liberdade efetivos), para a terceira frequência, a malha deve ter no mínimo dois elementos (três graus de liberdade efetivos), e assim por diante. O processo adaptativo não é aplicado ao primeiro autovalor uma vez que a solução obtida pelo MEF linear com um único elemento representa adequadamente a solução analítica (movimento de corpo rígido) e apresenta elevada precisão. O comportamento do erro relativo dos autovalores alvo nas análises adaptativas é apresentado na figura 5.30.

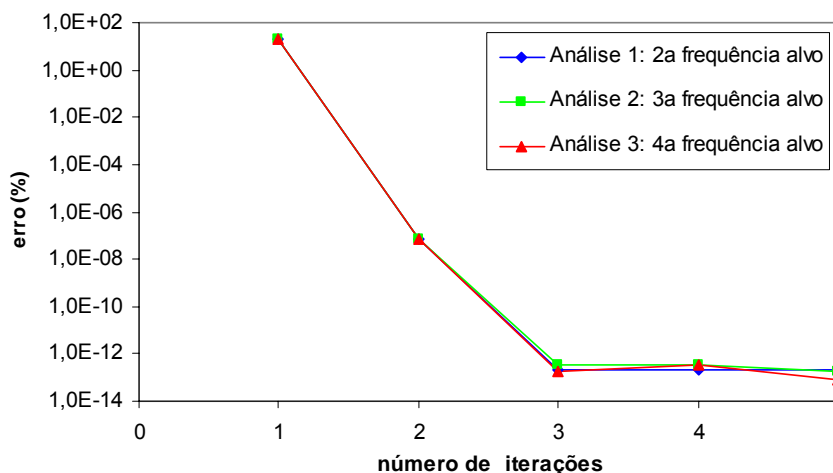


FIGURA 5.30 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – BARRA UNIFORME LIVRE-LIVRE

Observa-se novamente que em todos os casos analisados o erro relativo do autovalor alvo diminui rapidamente e a partir da terceira iteração estabiliza-se com valor inferior a  $10^{-12}$  %.

A tabela 5.4 apresenta os erros relativos obtidos pelos métodos numéricos empregados. A solução pelo MEF linear  $h$  é obtida com 99 elementos lineares, ou seja, 100 graus de liberdade efetivos. Já na análise pelo MEF cúbico  $h$  são empregados 33 elementos cúbicos, ou seja, 100 graus de liberdade. O MEF  $p$  utiliza um elemento hierárquico de 33 nós, correspondendo a 33 graus de liberdade. O MC também utiliza apenas um elemento e 16 funções enriquecedoras, que correspondem a dois graus de liberdade nodais e 16 graus de liberdade de campo. As análises pelo MEFG Adaptativo utilizam não mais que 16 graus de liberdade por iteração.

TABELA 5.4 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE BARRA UNIFORME LIVRE-LIVRE

Autovalor	MEF linear $h$ (99e) ngl <sup>(a)</sup> = 100	MEF cúbico $h$ (33e) ngl = 100	MEF $p$ (1e 33n) ngl = 33	MC $c$ (1e 16c) ngl = 18	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(b)</sup>
2	8,392 e-3	7,383 e-10	2,702 e-9	5,474 e-3	2,160 e-13	1x 2 gl + 2x 6 gl
3	3,357 e-2	4,720 e-8	1,188 e-12	2,644 e-2	3,420 e-13	1x 3 gl + 2x 11 gl
4	7,555 e-2	5,368 e-7	1,231 e-9	5,013 e-2	1,920 e-13	1x 4 gl + 2x 16 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;

(b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Observa-se que a precisão alcançada pelo MEFG Adaptativo novamente é maior do que a obtida pelos refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF, e pelo refinamento  $c$  do MC, todos com número de graus de liberdade superior ao empregado nas iterações do MEFG.

#### 5.2.4 Barra uniforme fixa-livre com massa concentrada na extremidade

Nesta seção é analisada a vibração axial livre de uma barra de seção transversal uniforme fixa-livre, com uma massa ( $m$ ) concentrada na extremidade livre (figura 5.31). A barra tem comprimento  $L = 1$  m, rigidez axial  $EA = 10$  N, massa linear  $\rho A = 1$  kg/m e massa concentrada  $m = 10$  kg, conforme problema proposto por Tongue (2002).

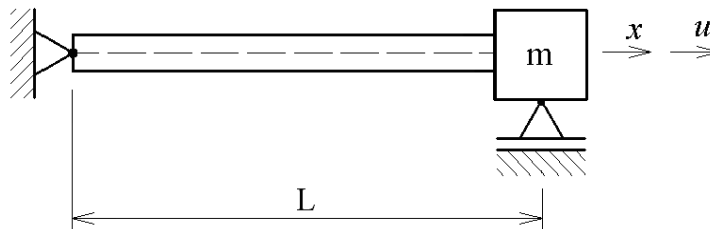


FIGURA 5.31 – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA NA EXTREMIDADE

##### 5.2.4.1 Solução analítica

Aplicando as condições de contorno à solução geral do problema (equações (3.49) a (3.51)) obtém-se a equação da frequência:

$$\kappa_r^2 m \sin(\kappa_r L) - \kappa_r \rho A \cos(\kappa_r L) = 0 \quad (5.13)$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \kappa_r \quad (5.14)$$

ou na forma apresentada por Inman (1996):



$$\cot(\kappa_r L) = \frac{m}{\rho A} \kappa_r \quad (5.15)$$

cujas raízes fornecem as frequências naturais de vibração do problema. Os modos naturais de vibração são dados por

$$u_r(x) = a \sin(\kappa_r x) \quad (5.16)$$

sendo  $a$  uma constante.

Para o problema proposto, as dez primeiras frequências naturais analíticas estão listadas na tabela 5.5.

TABELA 5.5 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA BARRA FIXA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA

Frequência	rad/s
$\omega_1$	0,9836354730
$\omega_2$	10,0342143154
$\omega_3$	19,9193746939
$\omega_4$	29,8372786634
$\omega_5$	39,7635012239
$\omega_6$	49,6930645898
$\omega_7$	59,6243011226
$\omega_8$	69,5564945642
$\omega_9$	79,4892863717
$\omega_{10}$	89,4224772162

#### 5.2.4.2 Solução aproximada

Observando a formulação variacional descrita no capítulo 3, verifica-se que adicionar uma massa concentrada a um nó corresponde a somar o valor da massa ( $m$ ) ao coeficiente da diagonal principal da matriz de massa correspondente ao grau de liberdade nodal afetado.

Quatro diferentes análises adaptativas são realizadas para obter as quatro primeiras frequências naturais, com o intuito de avaliar o desempenho do processo adaptativo em relação ao MEF e ao MC. Em cada análise adaptativa foi empregada

malha com o menor número de elementos necessário para capturar uma primeira aproximação da frequência alvo. O comportamento do erro relativo das frequências alvo nestas análises é apresentado na figura 5.32.

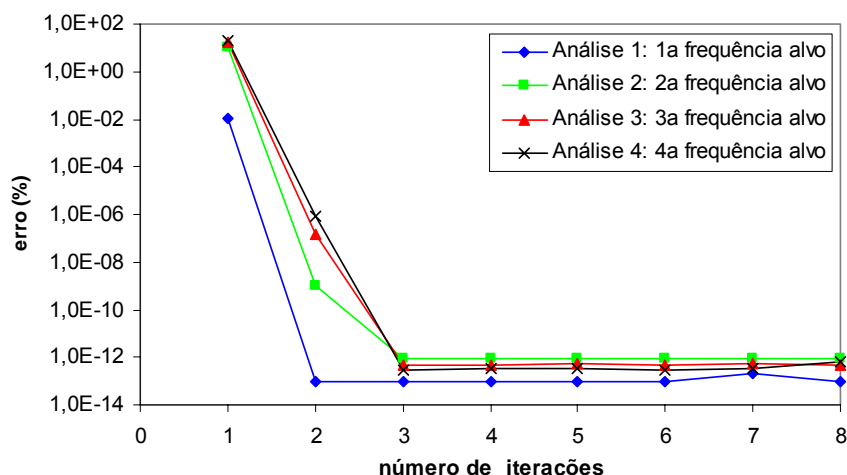


FIGURA 5.32 – ERRO RELATIVO DAS FREQUÊNCIAS ALVO – BARRA UNIFORME FIXA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA

Observa-se que a solução converge e o erro relativo da frequência alvo estabiliza-se a partir da terceira iteração com valor inferior a  $10^{-12}$  %.

A tabela 5.6 apresenta os erros relativos obtidos pelos métodos numéricos empregados. A solução pelo MEF linear  $h$  é obtida com 100 elementos lineares. Já na análise pelo MEF cúbico  $h$  são empregados 33 elementos cúbicos. O MEF  $p$  utiliza um elemento hierárquico de 33 nós. O MC também utiliza apenas um elemento e 19 funções enriquecedoras. As análises pelo MEFG Adaptativo utilizam número máximo de graus de liberdade por iteração variando entre 5 e 20.

TABELA 5.6 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE BARRA FIXA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA

Autovalor	MEF linear $h$ (100e) ngl <sup>(a)</sup> = 100	MEF cúbico $h$ (33e) ngl = 99	MEF $p$ (1e 33n) ngl = 32	MC $c$ (1e 19c) ngl = 20	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(b)</sup>
1	1,344 e-6	7,865 e-10	6,095 e-13	4,314 e-7	9,000 e-14	1x 1 gl + 2x 5 gl
2	4,196 e-3	1,575 e-10	9,914 e-13	9,133 e-7	9,000 e-13	1x 2 gl + 2x 10 gl
3	1,678 e-2	2,381 e-08	6,628 e-11	9,251 e-7	4,500 e-13	1x 3 gl + 2x 15 gl
4	3,777 e-2	2,696 e-07	2,012 e-12	9,340 e-7	3,000 e-13	1x 4 gl + 2x 20 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;  
(b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Outra vez a precisão alcançada pelo MEFG Adaptativo é superior à obtida pelos refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF, e pelo refinamento  $c$  do MC, com maior número de graus de liberdade.

### 5.2.5 Barra fixa-livre composta por dois materiais diferentes

Neste tópico é analisado o problema de vibração livre de uma barra fixa-livre composta por dois materiais diferentes e com variação abrupta de seção transversal (figura 5.33). A barra tem comprimentos  $L_1 = L_2$ , módulos de elasticidade  $E_2 = 2E_1$ , áreas de seção transversal  $A_2 = 2A_1$ , e massas específicas  $\rho_2 = 8\rho_1$ .

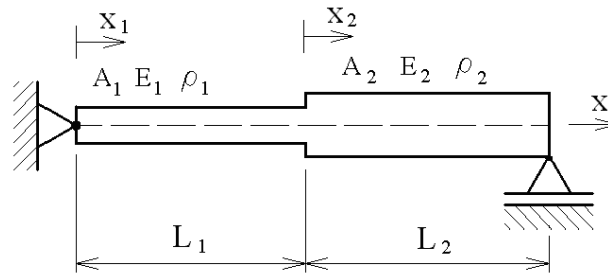


FIGURA 5.33 – BARRA FIXA-LIVRE BIMATERIAL

#### 5.2.5.1 Solução analítica

No problema proposto, cada parte da barra tem como solução geral a expressão obtida na equação (3.49), ou seja:

$$u_1(x_1) = b_1 \operatorname{sen}(\kappa_1 x_1) + b_2 \cos(\kappa_1 x_1) \quad (5.17)$$

$$u_2(x_2) = b_3 \operatorname{sen}(\kappa_2 x_2) + b_4 \cos(\kappa_2 x_2) \quad (5.18)$$

$$\kappa_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} \quad (5.19)$$

$$\kappa_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} \quad (5.20)$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$u_1(0) = 0 \quad (5.21)$$

$$u_1(L_1) = u_2(0) \quad (5.22)$$

$$E_2 A_2 \frac{du_2(L_2)}{dx_2} = 0 \quad (5.23)$$

$$E_1 A_1 \frac{du_1(L_1)}{dx_1} = E_2 A_2 \frac{du_2(0)}{dx_2} \quad (5.24)$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são os deslocamentos axiais dos diferentes trechos da barra referentes aos sistemas de coordenadas locais  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente (figura 5.33), e  $\omega$  é a frequência natural de vibração. Aplicando as condições de contorno às equações governantes do problema, obtém-se a equação da frequência:

$$\frac{E_1 A_1 \kappa_1 \cos(\kappa_1 L_1) \cos(\alpha \kappa_1 L_2) - \alpha E_2 A_2 \kappa_1 \sin(\kappa_1 L_1) \sin(\alpha \kappa_1 L_2)}{\cos(\alpha \kappa_1 L_2)} = 0 \quad (5.25)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho_2 E_1}{\rho_1 E_2}} \quad (5.26)$$

cujas raízes fornecem as frequências naturais de vibração do problema.

Para o problema proposto, os dez primeiros autovalores adimensionais analíticos  $\chi_r = (\kappa_1 L_1)^2$  obtidos pela solução da equação da frequência estão listados na tabela 5.7.

TABELA 5.7 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DOS AUTOVALORES DA BARRA FIXA-LIVRE BIMATERIAL

Autovalor	
$\chi_1$	0,0566159789
$\chi_2$	2,4674011003
$\chi_3$	8,4311922005
$\chi_4$	11,4212485595
$\chi_5$	22,2066099025
$\chi_6$	36,5449772242
$\chi_7$	42,5250899423
$\chi_8$	61,6850275068
$\chi_9$	84,3979710502
$\chi_{10}$	93,3681401272

### 5.2.5.2 MEFG Adaptativo

Seis diferentes análises adaptativas são realizadas para obter as seis primeiras frequências naturais. Em cada análise adaptativa foi empregada malha com o menor número de elementos necessário para capturar uma primeira aproximação da frequência alvo e representar a geometria da barra. O comportamento do erro relativo dos autovalores adimensionais  $\chi_r = (\kappa_1 L_1)^2$  nestas análises é apresentado na figura 5.34.

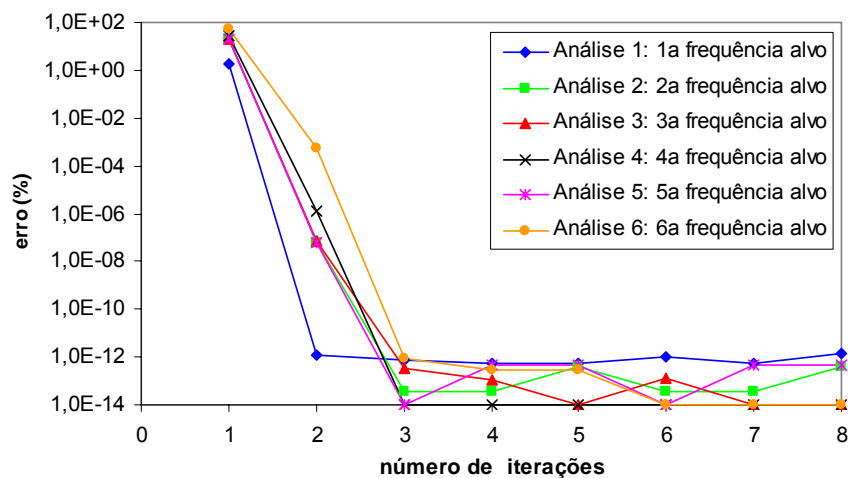


FIGURA 5.34 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – BARRA FIXA-LIVRE BIMATERIAL

Observa-se que o erro relativo do autovalor alvo diminui rapidamente e a partir da terceira iteração, embora oscile devido a erros de arredondamento do processo numérico, permanece estável com valor inferior a  $10^{-12}$  %.

A tabela 5.8 apresenta os erros relativos dos autovalores  $\chi_r = (\kappa_1 L_1)^2$  obtidos pelos métodos numéricos empregados nas análises. A solução pelo MEF linear  $h$  é obtida com 100 elementos lineares. Já na análise pelo MEF cúbico  $h$  são empregados 34 elementos cúbicos. O MEF  $p$  utiliza dois elementos hierárquicos de 33 nós. O MC, por sua vez, também utiliza dois elementos e oito funções enriquecedoras. As análises pelo MEFG Adaptativo utilizam número máximo de graus de liberdade por iteração variando entre 10 e 30. Também foi considerada uma solução de referência do MEF obtida através do software comercial ANSYS

versão 9.0 utilizando 1000 elementos de treliça (LINK8) e o método do subespaço com parâmetros “default” para extração dos modos naturais.

TABELA 5.8 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE BARRA BIMATERIAL

Autovalor	MEF linear $h$ (100e) ngl = 100	MEF cúbico $h$ (34e) ngl <sup>(a)</sup> = 102	Ansys <sup>(c)</sup> (1000e) ngl = 1000	MEF $p$ (2e 33n) ngl = 64	MC $c$ (2e 8c) ngl = 18	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	<sup>(b)</sup> ngl nas iterações
1	7,449 e-4	9,681 e-10	2,608 e-3	1,949 e-12	5,596 e-4	7,109 e-13	1x 2 gl + 2x 10 gl
2	3,145 e-2	3,731 e-8	3,780 e-13	1,094 e-11	3,465 e-2	3,648 e-14	1x 2 gl + 2x 10 gl
3	6,956 e-2	7,849 e-7	2,137 e-4	7,382 e-9	8,587 e-2	3,371 e-13	1x 4 gl + 2x 20 gl
4	1,023 e-1	2,218 e-6	1,836 e-4	1,921 e-9	1,185 e-1	1,000 e-14	1x 4 gl + 2x 20 gl
5	2,833 e-1	2,685 e-5	2,667 e-3	2,529 e-9	3,328 e-1	1,000 e-14	1x 6 gl + 2x 30 gl
6	3,070 e-1	6,531 e-5	4,055 e-3	7,949 e-10	4,106 e-1	8,166 e-13	1x 6 gl + 2x 30 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;  
 (b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.  
 (c) Ansys = resultado obtido pelo software ANSYS utilizando malha com 1000 elementos de treliça (LINK8).

Observa-se novamente que a precisão alcançada pelo MEFG Adaptativo permanece maior do que a obtida pelos refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF e pelo refinamento  $c$  do MC, com número maior de graus de liberdade.

#### 5.2.6 Barras não uniformes

Para avaliar a eficiência do MEFG na análise de vibração axial livre de barras com seção transversal não uniforme, foram analisadas duas situações cujas soluções analíticas são conhecidas.

##### 5.2.6.1 Barra fixa-fixa com variação senoidal de área

Nesta seção é analisada a vibração livre axial de uma barra com uma variação de área na forma:

$$A(x) = A_0 \sin^2(ax + b) \quad (5.27)$$

onde  $A_0$ ,  $a$  e  $b$  são parâmetros que descrevem a variação senoidal.

Segundo Kumar e Sujith (1997), a solução geral analítica deste problema é:

$$u_r(x) = [1/\sin(ax + b)] [c_1 \sin(\kappa_r x) + c_2 \cos(\kappa_r x)] \quad (5.28)$$

$$\kappa_r^2 = \rho \omega_r^2 / E + a^2 \quad (5.29)$$

onde  $\rho$  é a massa específica,  $\omega_r$  é a frequência natural,  $E$  é o módulo de elasticidade e,  $c_1$  e  $c_2$  são constantes.

Para uma barra fixa-fixa, obtém-se  $\kappa_r L = r\pi$ , onde  $\kappa_r$  é obtido pela equação (5.29) e  $r$  é a ordem do modo natural de vibração. Logo, a forma do modo de vibração desta barra é dada por (KUMAR; SUJITH, 1997):

$$u_r(x) = c_1 \frac{\sin(\kappa_r x)}{\sin(ax + b)} \quad (5.30)$$

onde  $c_1$  é uma constante.

Neste exemplo é analisado o problema de vibração livre de uma barra fixa-fixa com comprimento  $L=1$ , massa específica  $\rho$ , módulo de elasticidade  $E$ , e variação senoidal de área (eq. (5.27)) com parâmetros  $A_0=1$ ,  $a=1$  e  $b=1$ .

Seis diferentes análises adaptativas são empregadas para obter cada uma das seis primeiras frequências naturais da barra. Em cada análise foi empregada malha com o menor número de elementos necessário para capturar uma primeira aproximação da frequência alvo. O comportamento do erro relativo dos autovalores adimensionais  $\chi_r = \omega_r L \sqrt{\rho/E}$ , referentes às frequências alvo, nas análises adaptativas é apresentado na figura 5.35.

Verifica-se que em todas as análises o processo adaptativo converge, porém com precisão inferior à atingida para barras com seção uniforme.

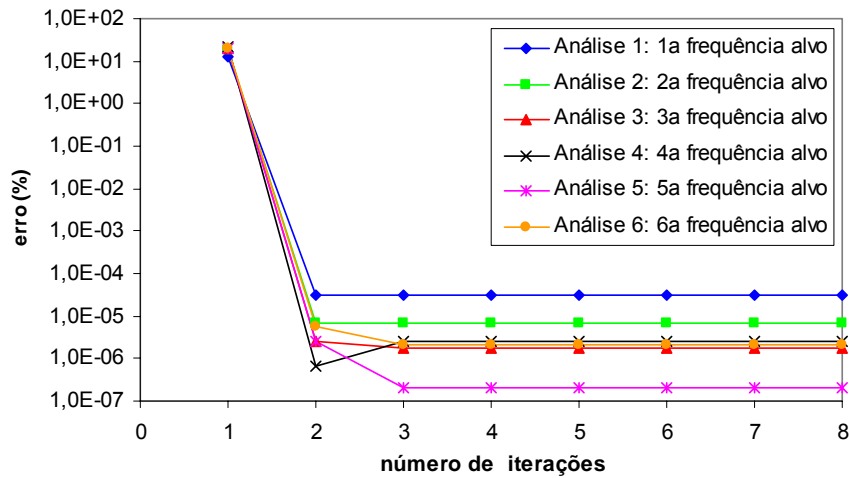


FIGURA 5.35 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – BARRA FIXA-FIXA COM VARIAÇÃO DE ÁREA SENOIDAL

Este problema também é analisado utilizando-se os refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF. A tabela 5.9 apresenta os erros relativos dos autovalores adimensionais  $\chi_r = \omega_r L \sqrt{\rho/E}$  obtidos pelos métodos numéricos. A solução pelo MEF linear  $h$  é obtida com 100 elementos lineares. Já na análise pelo MEF cúbico  $h$  são empregados 12 elementos cúbicos. As análises pelo MEFG Adaptativo utilizam número máximo de graus de liberdade por iteração variando entre 9 e 34.

TABELA 5.9 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DA BARRA FIXA-FIXA COM VARIAÇÃO DE ÁREA SENOIDAL

$r$	Solução analítica (KUMAR; SUJITH, 1997)	MEF linear $h$ (100e) ngl = 99	MEF cúbico $h$ (12e) ngl <sup>(a)</sup> = 35	MEF $p$ hierárquico (1e 9n) ngl = 7	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)		
	$\chi_r$	erro (%)	erro (%)	erro (%)	$\chi_r$	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(b)</sup>
1	2,978189	4,737 e-3	2,577 e-5	2,998 e-5	2,978188	2,997 e-5	1x 1gl + 2x 9 gl
2	6,203097	1,699 e-2	1,901 e-4	1,944 e-5	6,203097	6,871 e-6	1x 2gl + 2x 14 gl
3	9,371576	3,753 e-2	3,065 e-4	7,299 e-4	9,371576	1,731 e-6	1x 3gl + 2x 19 gl
4	12,526519	6,632 e-2	7,312 e-4	4,702 e-1	12,526519	2,441 e-6	1x 4gl + 2x 24 gl
5	15,676100	1,033 e-1	2,332 e-3	1,229	15,676100	2,044 e-7	1x 5gl + 2x 29 gl
6	18,823011	1,486 e-1	6,787 e-3	24,316	18,823011	2,187 e-6	1x 6gl + 2x 34 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;  
 (b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Ao aplicar o refinamento  $p$  hierárquico do MEF neste exemplo, nas análises



com os elementos de 17 e 33 nós foram obtidos autovalores negativos (modos espúrios), indicando deficiência na integração dos coeficientes das matrizes ao empregar para tal a função intrínseca do Maple. Para solucionar o problema foi empregada a integração por Quadratura de Gauss utilizando dez pontos de integração por intervalo e, três e oito intervalos de integração por elemento para os elementos de 17 e 33 nós, respectivamente. Os resultados obtidos para o MEF  $p$  com integração por Quadratura de Gauss estão apresentados na tabela 5.10.

TABELA 5.10 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DA BARRA FIXA-FIXA COM VARIAÇÃO DE ÁREA SENOIDAL – MEF  $p$  COM QUADRATURA DE GAUSS

Autovalor	MEF $p$ hierárquico (1e 17n) ngl <sup>(a)</sup> = 15	MEF $p$ hierárquico (1e 33n) ngl <sup>(a)</sup> = 31	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	erro (%)	erro (%)	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(b)</sup>
1	2,998 e-5	2,998 e-5	2,997 e-5	1x 1gl + 2x 9 gl
2	6,774 e-6	6,774 e-6	6,871 e-6	1x 2gl + 2x 14 gl
3	1,643 e-6	1,643 e-6	1,731 e-6	1x 3gl + 2x 19 gl
4	2,498 e-6	2,498 e-6	2,441 e-6	1x 4gl + 2x 24 gl
5	2,326 e-7	2,407 e-7	2,044 e-7	1x 5gl + 2x 29 gl
6	3,913 e-5	2,163 e-6	2,187 e-6	1x 6gl + 2x 34 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;

(b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Observa-se que, embora o MEFG Adaptativo não tenha atingido o mesmo nível de precisão obtido nos problemas com barras uniformes, o erro na solução das seis primeiras frequências é muitas vezes menor que obtido pelo refinamento  $h$  do MEF linear com 99 graus de liberdade, principalmente para as frequências mais altas. A precisão alcançada pelo processo adaptativo também é semelhante à obtida utilizando-se o refinamento  $p$  do MEF com 31 graus de liberdade para todas as frequências calculadas. Para a primeira frequência, o MEFG Adaptativo apresenta precisão similar à obtida pelo refinamento  $h$  do MEF cúbico com 35 graus de liberdade, porém observa-se que os resultados das análises adaptativas são melhores a partir da segunda frequência, utilizando um número menor de graus de liberdade. A precisão obtida no processo adaptativo pode ser ainda melhorada utilizando-se malhas mais refinadas.

### 5.2.6.2 Barra fixa-fixa com variação polinomial de área

Nesta seção é analisada a vibração livre axial de uma barra com uma variação de área na forma:

$$A(x) = (ax + b)^4 \quad (5.31)$$

onde  $a$  e  $b$  são parâmetros que descrevem a variação polinomial.

Segundo Kumar e Sujith (1997), a solução analítica do problema de vibração livre de uma barra com variação polinomial de área da seção transversal na forma  $A(x) = (ax + b)^n$  é:

$$u_r(x) = A^\alpha \left[ c_1 J_\nu(\lambda_r A^\sigma) + c_2 Y_\nu(\lambda_r A^\sigma) \right] \quad \text{quando } \nu \text{ é inteiro} \quad (5.32)$$

$$u_r(x) = A^\alpha \left[ c_1 J_\nu(\lambda_r A^\sigma) + c_2 J_{-\nu}(\lambda_r A^\sigma) \right] \quad \text{quando } \nu \text{ não é inteiro} \quad (5.33)$$

onde

$$\nu = \frac{1-n}{2} \quad (5.34)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \quad (5.35)$$

$$\lambda_r = \frac{\omega_r}{a} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (5.36)$$

$$\sigma = \frac{1}{n} \quad (5.37)$$

e,  $J_\nu$  são funções de Bessel de primeiro tipo e de ordem  $\nu$ ,  $Y_\nu$  são funções de Bessel de segundo tipo e de ordem  $\nu$ ,  $A_0 = A(0)$ ,  $\rho$  é a massa específica,  $\omega_r$  é a frequência natural e  $E$  é o módulo de elasticidade. Kumar e Sujith (1997) verificaram que as frequências naturais mais baixas são mais afetadas pela variação da seção transversal e as mais altas são muito próximas das frequências da barra uniforme equivalente. Outra característica observada foi o decaimento da amplitude da

vibração axial ao longo do eixo longitudinal. Entretanto, a solução do exemplo numérico de uma barra fixa-fixa apresentada por Kumar e Sujith (1997) está incorreta. A equação da frequência correta para a barra fixa-fixa e  $n = 4$  é:

$$J_{-3/2}([\beta_r/a]A_0^{1/4})J_{3/2}([\beta_r/a]A_1^{1/4}) - J_{3/2}([\beta_r/a]A_0^{1/4})J_{-3/2}([\beta_r/a]A_1^{1/4}) = 0 \quad (5.38)$$

$$A_1 = A(L) = (aL + b)^4 \quad (5.39)$$

$$\beta_r = \omega_r \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (5.40)$$

Neste exemplo é analisado o problema de vibração livre de uma barra fixa-fixa com comprimento  $L = 1$ , massa específica  $\rho$ , módulo de elasticidade  $E$  e variação polinomial de área (eq. (5.31)) com parâmetros  $a = 1$  e  $b = 1$ .

Novamente seis diferentes análises adaptativas são empregadas para obter cada uma das seis primeiras frequências naturais da barra, e em cada análise foi empregada malha com o menor número de elementos necessário para capturar uma primeira aproximação da frequência alvo. O comportamento do erro relativo dos autovalores adimensionais  $\chi_r = \beta_r L$  referentes às frequências alvo nas análises adaptativas é apresentado na figura 5.36.

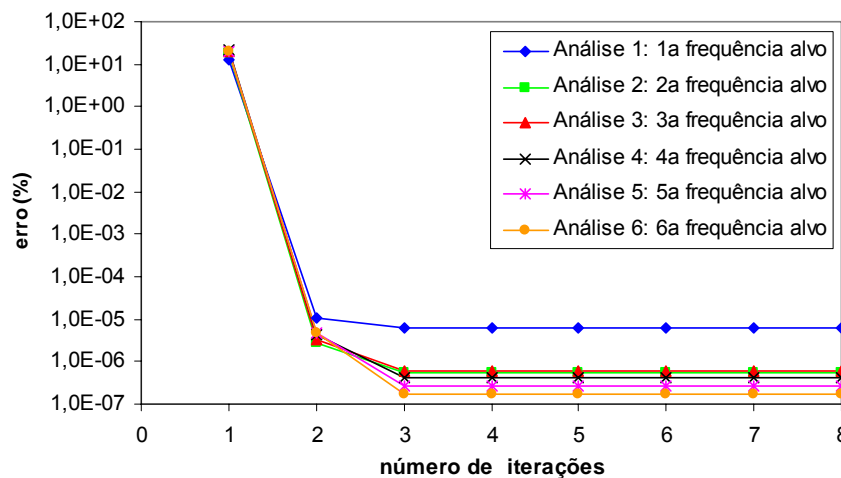


FIGURA 5.36 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – BARRA FIXA-FIXA COM VARIAÇÃO DE ÁREA POLINOMIAL

O problema também é analisado utilizando os refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF. A tabela 5.11 apresenta os erros relativos dos autovalores adimensionais  $\chi_r = \beta_r L$  obtidos por estes métodos numéricos. As características dos métodos são as mesmas utilizadas para a barra com variação senoidal da área. O MEF  $p$  utiliza neste caso um elemento hierárquico de 33 nós.

Observa-se que, embora o MEFG Adaptativo não tenha atingido o mesmo nível de precisão obtido nos problemas com barras uniformes, o erro na solução das seis primeiras frequências é muitas vezes menor que obtido pelo refinamento  $h$  do MEF linear com número maior de graus de liberdade, principalmente para as frequências mais altas. Para a primeira frequência, o MEFG Adaptativo com nove graus de liberdade nas iterações apresenta precisão inferior à obtida pelo refinamento  $h$  do MEF cúbico com 35 graus de liberdade. Porém, observa-se que os resultados das análises adaptativas são melhores a partir da segunda frequência, utilizando sempre um número menor de graus de liberdade. Neste exemplo, o refinamento  $p$  hierárquico do MEF apresenta maior precisão que o MEFG Adaptativo para todas as seis primeiras frequências.

TABELA 5.11 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DA BARRA FIXA-FIXA COM VARIAÇÃO DE ÁREA POLINOMIAL

$r$	Solução analítica	MEF linear $h$ (100e) $ngl^{(a)} = 99$	MEF cúbico $h$ (12e) $ngl = 35$	MEF $p$ hierárquico (1e 33n) $ngl = 31$	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)		
	$\chi_r$	erro (%)	erro (%)	erro (%)	$\chi_r$	erro (%)	$ngl$ nas iterações <sup>(b)</sup>
1	3,286007	5,130 e-3	8,861 e-8	2,410 e-8	3,286007	6,330 e-6	1x 1gl + 2x 9 gl
2	6,360678	1,763 e-2	8,264 e-6	8,601 e-9	6,360678	5,409 e-7	1x 2gl + 2x 14 gl
3	9,477196	3,823 e-2	1,085 e-4	2,355 e-10	9,477196	6,061 e-7	1x 3gl + 2x 19 gl
4	12,605890	6,704 e-2	6,191 e-4	2,709 e-9	12,605890	4,269 e-7	1x 4gl + 2x 24 gl
5	15,739656	1,041 e-1	2,335 e-3	1,051 e-9	15,739656	2,760 e-7	1x 5gl + 2x 29 gl
6	18,876001	1,494 e-1	6,823 e-3	1,000 e-15	18,876001	1,789 e-7	1x 6gl + 2x 34 gl

Notas: (a)  $ngl$  = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;

(b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

A precisão obtida no processo adaptativo pode ser ainda melhorada utilizando-se malhas mais refinadas. A tabela 5.12 apresenta os resultados obtidos

por quatro análises do MEFG Adaptativo para as quatro primeiras frequências, utilizando malhas com um elemento a mais do que as malhas utilizadas para as análises apresentadas na tabela 5.11. Observa-se que todas as frequências obtidas apresentaram melhor precisão com a utilização de uma malha mais refinada.

TABELA 5.12 – RESULTADO DO MEFG ADAPTATIVO PARA BARRA FIXA-FIXA COM VARIAÇÃO DE ÁREA POLINOMIAL E MALHA MAIS REFINADA

$r$	Solução analítica	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)		
	$\chi_r$	$\chi_r$	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(a)</sup>
1	3,286007	3,286007	1,405 e-7	1x 2gl + 2x 14 gl
2	6,360678	6,360678	3,707 e-8	1x 3gl + 2x 19 gl
3	9,477196	9,477196	6,889 e-8	1x 4gl + 2x 24 gl
4	12,605890	12,605890	6,735 e-8	1x 5gl + 2x 29 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno

### 5.3 VIBRAÇÃO LIVRE DE EIXOS CIRCULARES RETOS

Como os problemas de vibração livre axial de barras e torcional de eixos são matematicamente idênticos, o elemento generalizado de barra tipo  $C^0$  também é aplicável na solução do problema de vibração de eixos estacionários. Logo, todos os exemplos de barra analisados anteriormente podem ser adaptados para problemas de eixos com as mesmas soluções. Para ilustrar a aplicação do MEFG Adaptativo na vibração livre de eixos são apresentados dois exemplos com condições de contorno diferentes das utilizadas nas barras.

#### 5.3.1 Eixo uniforme fixo-livre com massa concentrada

Nesta seção é analisada a vibração torcional livre de um eixo uniforme fixo-livre com seção transversal circular e uma massa concentrada na metade do seu comprimento (figura 5.37). O eixo tem as seguintes características: diâmetro de 0,0254 m, comprimento  $L = 1,016$  m, módulo de elasticidade transversal  $G = 8,27 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>, massa específica  $\rho = 7833,58$  kg/m<sup>3</sup> e momento de inércia polar da seção transversal  $I_p = 4,086 \times 10^{-8}$  m<sup>4</sup>. A massa concentrada possui inércia rotacional

$I_0 = \rho I_p L / 0,1$ . A solução analítica deste problema é apresentada nos trabalhos de Gorman (1975) e Chen (2006).

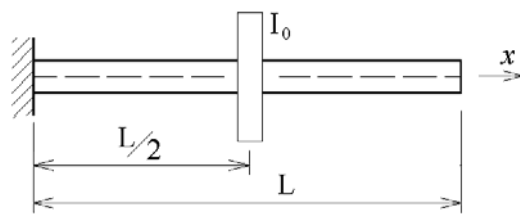


FIGURA 5.37 – EIXO CIRCULAR UNIFORME FIXO-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA

Segundo Gorman (1975), as frequências naturais analíticas ( $\omega_r$ ) deste eixo podem ser obtidas através da solução da equação característica:

$$\frac{\kappa_r \sin(\kappa_r/2)}{\cos(\kappa_r/2) - \tan(\kappa_r/2) \sin(\kappa_r/2)} - \frac{I_p \rho L}{I_0} = 0 \quad (5.41)$$

$$\omega_r = \frac{\kappa_r}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (5.42)$$

O autovalor adimensional  $\chi_r$  é utilizado para comparar a solução analítica com as soluções aproximadas. Este parâmetro é dado por:

$$\chi_r = \sqrt{\frac{\rho L^2 \omega_r^2}{G}} \quad (5.43)$$

A tabela 5.13 apresenta os resultados obtidos por cinco análises adaptativas do MEFG e as soluções analíticas apresentadas por Chen (2006) e calculadas a partir da equação característica (eq. (5.41)). Nas análises do MEFG Adaptativo foram utilizadas malhas com o número mínimo de elementos necessário para obter uma primeira aproximação da frequência alvo e representar a geometria do eixo.

TABELA 5.13 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE EIXO FIXO-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA

Autovalor	Solução analítica (eq. (5.41))	Solução analítica Chen (2006)	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	$\chi_r$	$\chi_r$	$\chi_r$	ngl nas iterações <sup>(a)</sup>
1	0,432841	0,432841	0,432841	1x 2 gl + 2x 10 gl
2	3,203935	3,203935	3,203935	1x 2 gl + 2x 10 gl
3	6,314846	6,314846	6,314846	1x 4 gl + 2x 20 gl
4	9,445948	9,445948	9,445948	1x 4 gl + 2x 20 gl
5	12,582265	12,582264	12,582265	1x 6 gl + 2x 30 gl

Notas: (a) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Observa-se que os resultados obtidos pelo MEFG Adaptativo são iguais aos resultados analíticos, exceto para o quinto autovalor, que difere na sexta casa decimal do resultado apresentado por Chen (2006).

### 5.3.2 Eixo uniforme fixo-livre com mola torcional

Nesta seção é analisada a vibração torcional livre um eixo uniforme com seção transversal circular, com as mesmas características do eixo analisado no tópico anterior, fixo na extremidade esquerda e ligado a uma mola torcional com rigidez  $k = 0,1GI_p/L$  na extremidade direita (figura 5.38).

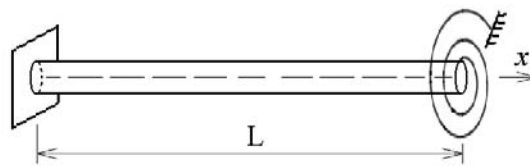


FIGURA 5.38 – EIXO CIRCULAR UNIFORME COM MOLA TORCIONAL

A solução analítica deste problema é apresentada por Gorman (1975), Inman (1996) e Chen (2006). As frequências naturais analíticas ( $\omega_r$ ) podem ser obtidas através da solução da equação característica (GORMAN, 1975; INMAN, 1996):

$$\kappa_r \cot(\kappa_r) + \frac{kL}{GI_p} = 0 \quad (5.44)$$

$$\omega_r = \frac{\kappa_r}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (5.45)$$

e os modos naturais de vibração são dados por:

$$u_r(x) = a \sin\left(\frac{\kappa_r x}{L}\right) \quad (5.46)$$

sendo  $a$  uma constante.

A tabela 5.14 apresenta os resultados obtidos por cinco diferentes análises do MEFG Adaptativo e as soluções analíticas calculadas a partir da equação característica (eq. (5.44)) e apresentadas por Chen (2006).

TABELA 5.14 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE EIXO COM MOLA TORCIONAL

Autovalor	Solução analítica (eq. (5.44))	Solução analítica Chen (2006)	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	$\chi_r$	$\chi_r$	$\chi_r$	ngl nas iterações <sup>(a)</sup>
1	1,631995	1,631994	1,631995	1x 1 gl + 2x 5 gl
2	4,733512	4,733512	4,733512	1x 2 gl + 2x 10 gl
3	7,866693	7,866693	7,866693	1x 3 gl + 2x 15 gl
4	11,004661	11,004661	11,004661	1x 4 gl + 2x 20 gl
5	14,144237	14,144237	14,144237	1x 5 gl + 2x 25 gl

Notas: (a) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Observa-se novamente que os resultados obtidos pelo MEFG Adaptativo são iguais aos resultados analíticos, com exceção de uma pequena diferença na sexta casa decimal do primeiro autovalor em relação ao obtido por Chen (2006).

## 5.4 VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI

Os casos analisados a seguir permitem avaliar o desempenho e a precisão do elemento generalizado de viga reta de Euler-Bernoulli (tipo C<sup>1</sup>) na análise da vibração livre de vigas sujeitas a diversas condições de contorno.

O cálculo do erro nas análises de vigas foi efetuado através do software



Maple para que fosse possível medir erros além do patamar imposto pelo uso de planilha eletrônica, como ocorrido nas análises de barras.

#### 5.4.1 Viga uniforme engastada-livre

A viga com seção transversal uniforme engastada-livre (figura 5.39), com comprimento  $L$ , módulo de elasticidade  $E$ , massa específica  $\rho$ , momento de inércia  $I$  e área da seção transversal  $A$ , tem frequências naturais analíticas de vibração ( $\omega_r$ ) obtidas pela solução da equação da frequência na forma clássica:

$$\cos(\kappa_r L) \cosh(\kappa_r L) + 1 = 0 \quad , \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.47)$$

$$\kappa_r = \sqrt[4]{\frac{\omega_r^2 \rho A}{EI}} \quad (5.48)$$

ou, na forma alternativa (GARTNER; OLGAC, 1982):

$$\cos(\kappa_r L) + \frac{2e^{-\kappa_r L}}{1 + e^{-2\kappa_r L}} = 0 \quad , \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.49)$$

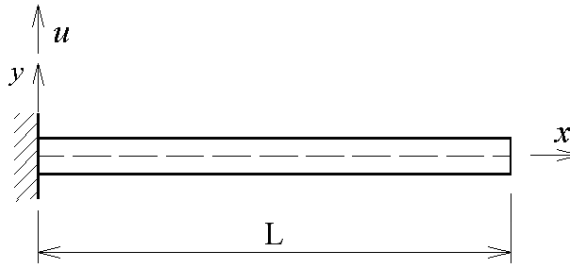


FIGURA 5.39 – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE

Os modos ( $v_r$ ) naturais de vibração analíticos desta viga são, na forma clássica:

$$v_r(x) = a \{ \cosh(\kappa_r x) - \cos(\kappa_r x) - \alpha_r [\sinh(\kappa_r x) - \sin(\kappa_r x)] \} \quad (5.50)$$

$$\alpha_r = \frac{\cosh(\kappa_r L) + \cos(\kappa_r L)}{\sinh(\kappa_r L) + \sin(\kappa_r L)} \quad (5.51)$$

ou, na forma alternativa (GARTNER; OLGAC, 1982):

$$v_r(x) = a \cos(\kappa_r x) + C_{2r} \sin(\kappa_r x) + C_{3r} e^{-\kappa_r x} + C_{4r} e^{-\kappa_r (L-x)} \quad (5.52)$$

$$C_{2r} = -\frac{1 + (-1)^r e^{-\kappa_r L}}{1 - (-1)^r e^{-\kappa_r L}} \quad (5.53)$$

$$C_{3r} = -\frac{1}{1 - (-1)^r e^{-\kappa_r L}} \quad (5.54)$$

$$C_{4r} = \frac{(-1)^r}{1 - (-1)^r e^{-\kappa_r L}} \quad (5.55)$$

sendo  $a$  uma constante.

O autovalor adimensional  $\chi_r = \kappa_r \cdot L$  é utilizado para determinar os erros relativos das soluções aproximadas conforme equações (5.1) e (5.2).

#### 5.4.1.1 Refinamento $h$

As figuras 5.40 a 5.43 apresentam os gráficos de evolução do erro relativo dos refinamentos  $h$  do MEF, do MC e de três diferentes formas do MEFG apresentadas no capítulo 4, para os quatro primeiros autovalores. Em todas as análises é utilizada uma malha uniforme. No refinamento  $h$  do MC é utilizada apenas uma função enriquecedora. Já no refinamento  $h$  do MEFG é utilizado apenas um nível de enriquecimento ( $n_l = 1$ ).

Observa-se que os refinamentos  $h$  do MEFG MC e do MEFG MMA apresentam resultados semelhantes entre si, mas melhores que os obtidos pelos refinamentos  $h$  do MEF e do MEFG Trig para todos os autovalores. Para o primeiro autovalor os resultados da versão  $h$  do MC são equivalentes aos obtidos pelo MEFG MC e pelo MEFG MMA porém, à medida que a ordem do autovalor aumenta, estes últimos apresentam resultados mais precisos que o MC  $h$ .

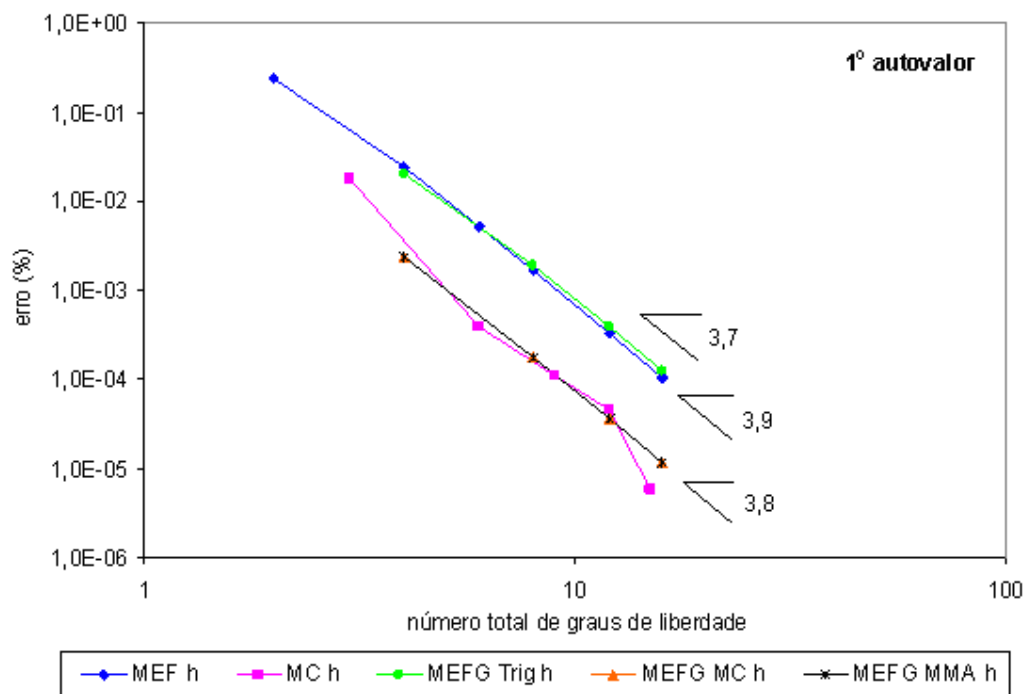


FIGURA 5.40 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $h$  – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE

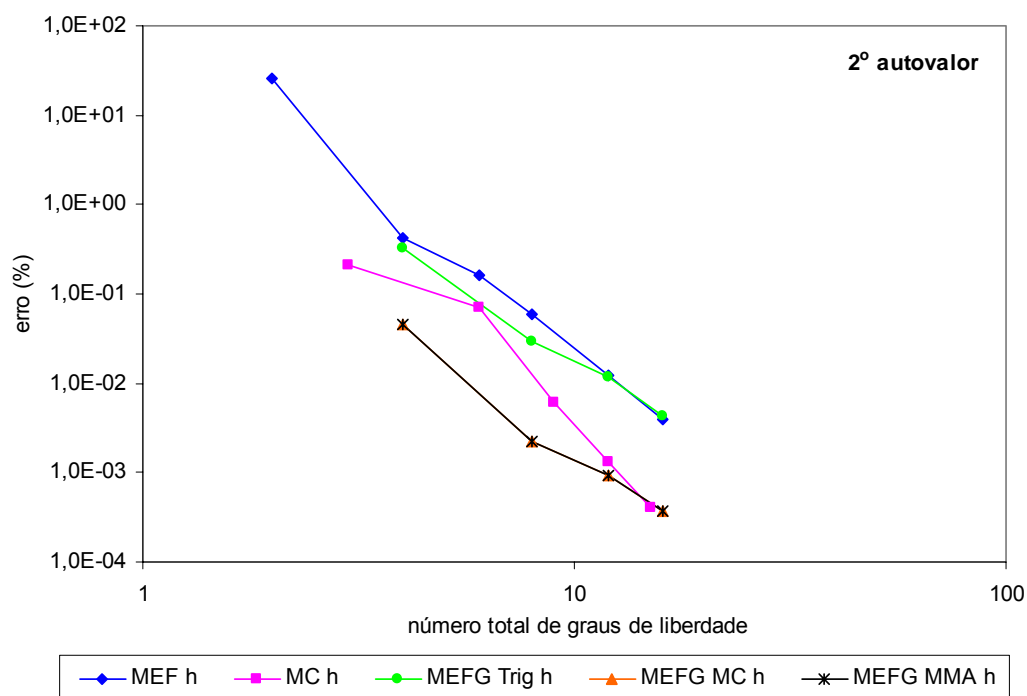


FIGURA 5.41 – ERRO RELATIVO DO 2º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $h$  – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE

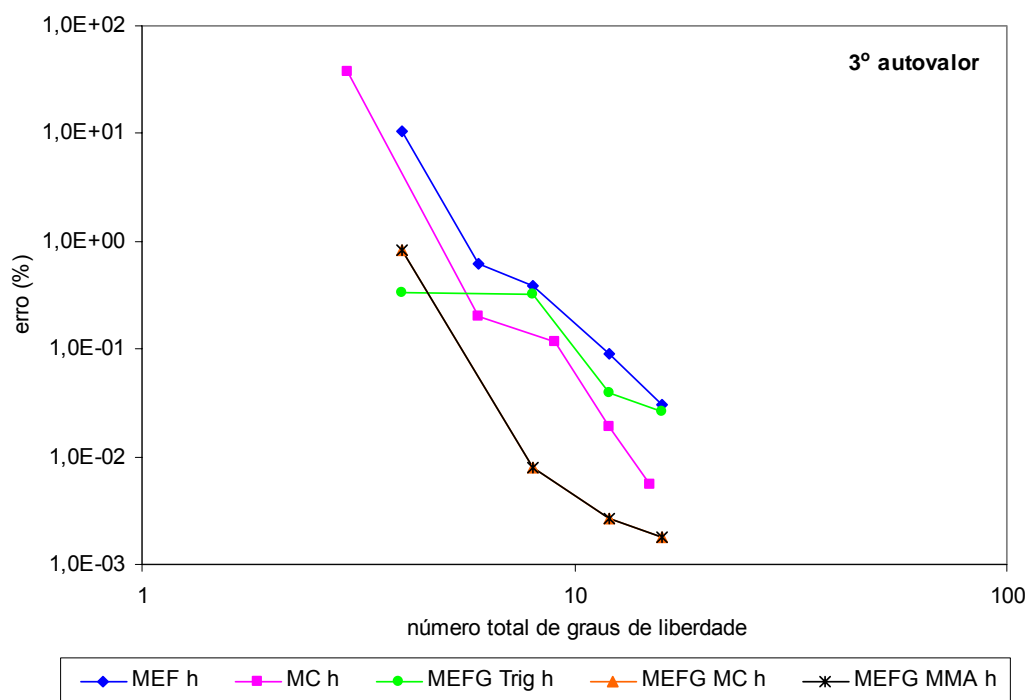


FIGURA 5.42 – ERRO RELATIVO DO 3º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $h$  – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE

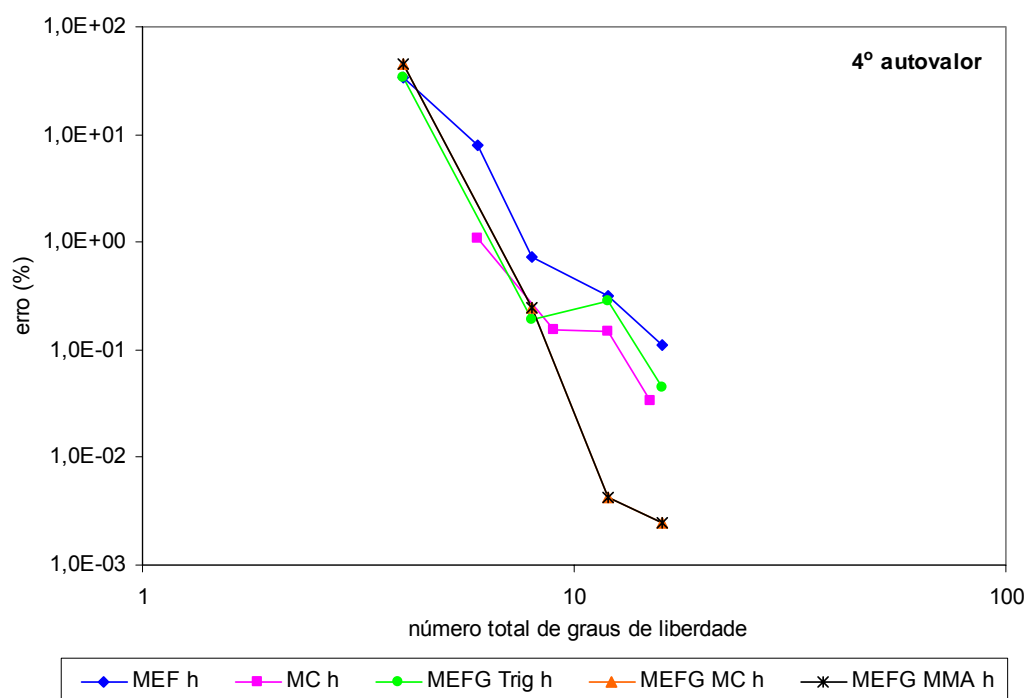


FIGURA 5.43 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $h$  – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE

### 5.4.1.2 Refinamento $p$

As figuras 5.44 a 5.51 apresentam a evolução do erro relativo dos refinamentos  $p$  hierárquicos das três formas do MEFG propostas e do MEF, além do refinamento  $c$  do MC, para os oito primeiros autovalores. Nestas análises são utilizadas malhas formadas por um único elemento.

Os resultados mostram que o refinamento  $p$  do MEF e das três formas do MEFG apresentam taxas de convergência maiores que os refinamentos  $h$  do MEF e que o refinamento  $c$  do MC para todos os autovalores analisados.

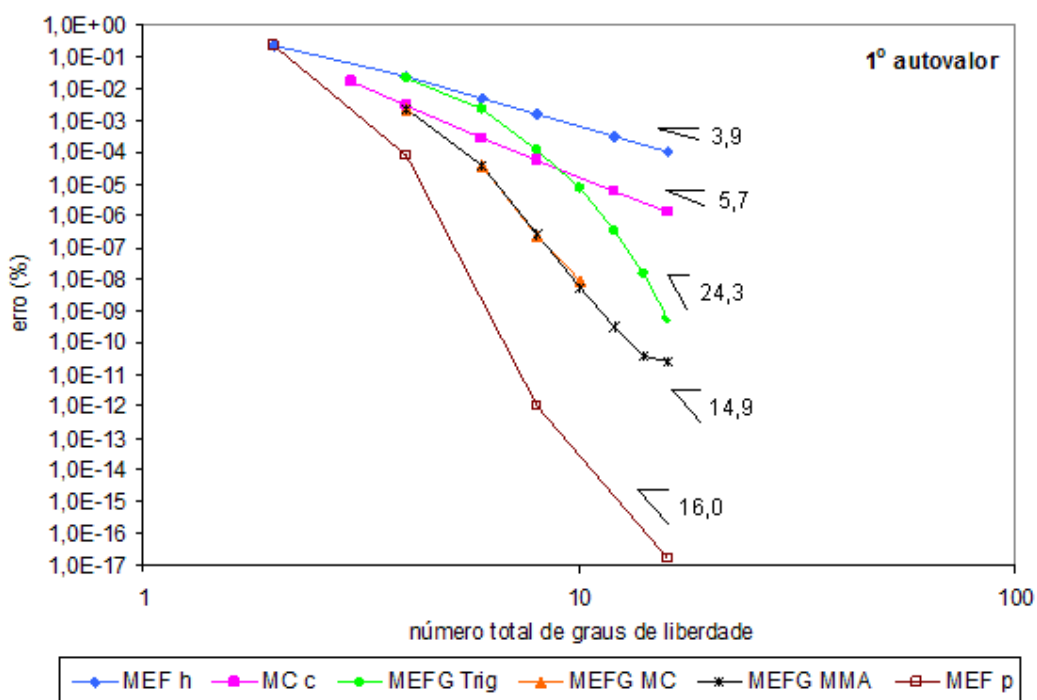


FIGURA 5.44 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE

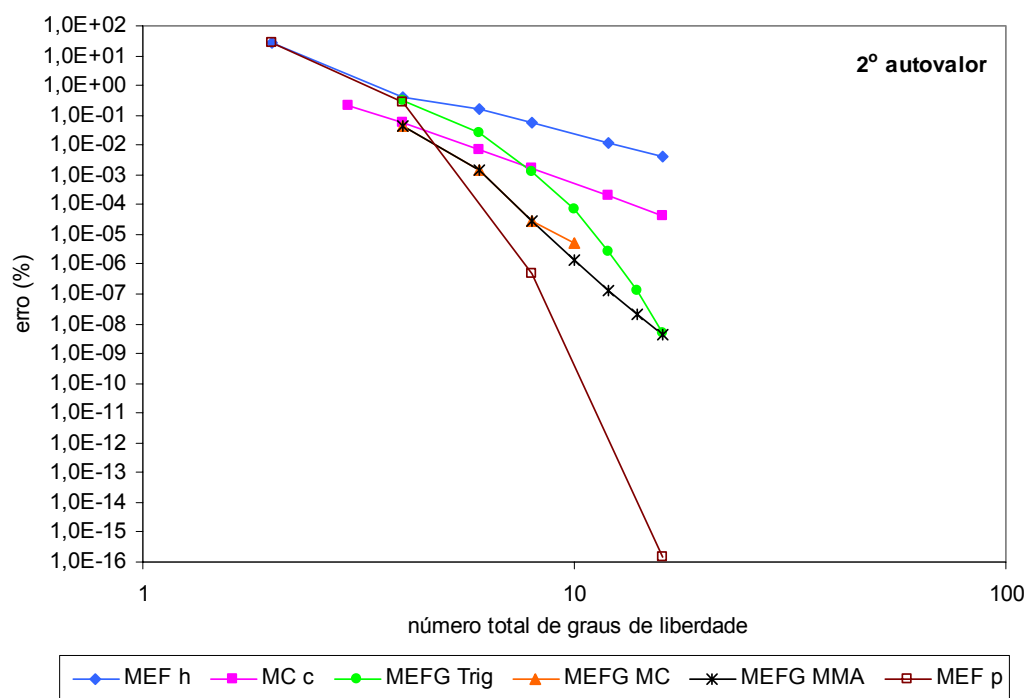


FIGURA 5.45 – ERRO RELATIVO DO 2º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE

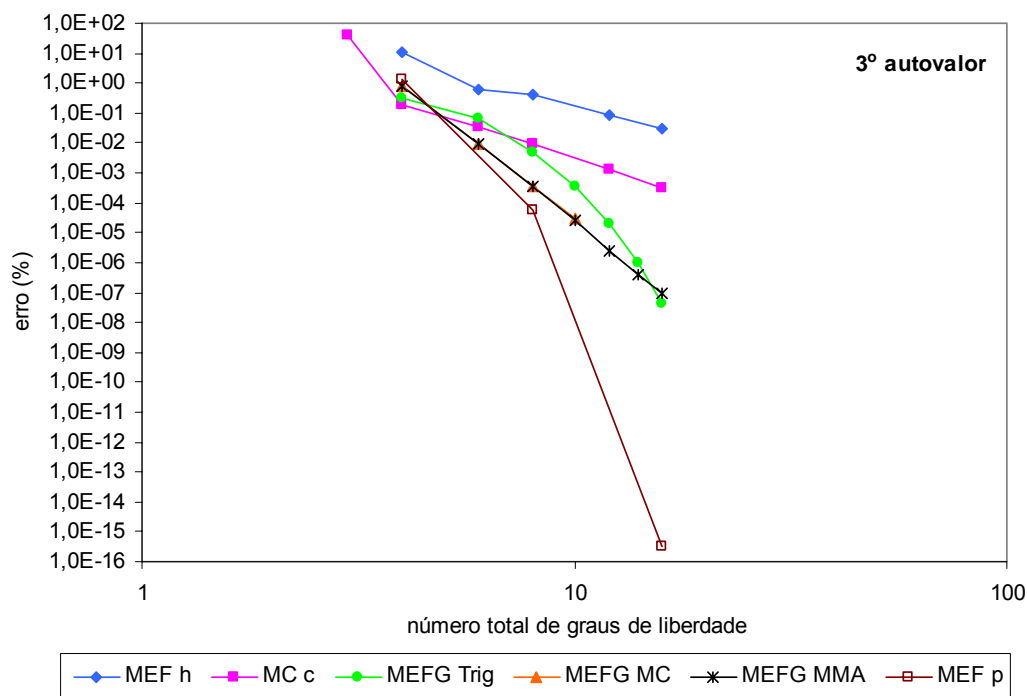


FIGURA 5.46 – ERRO RELATIVO DO 3º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE

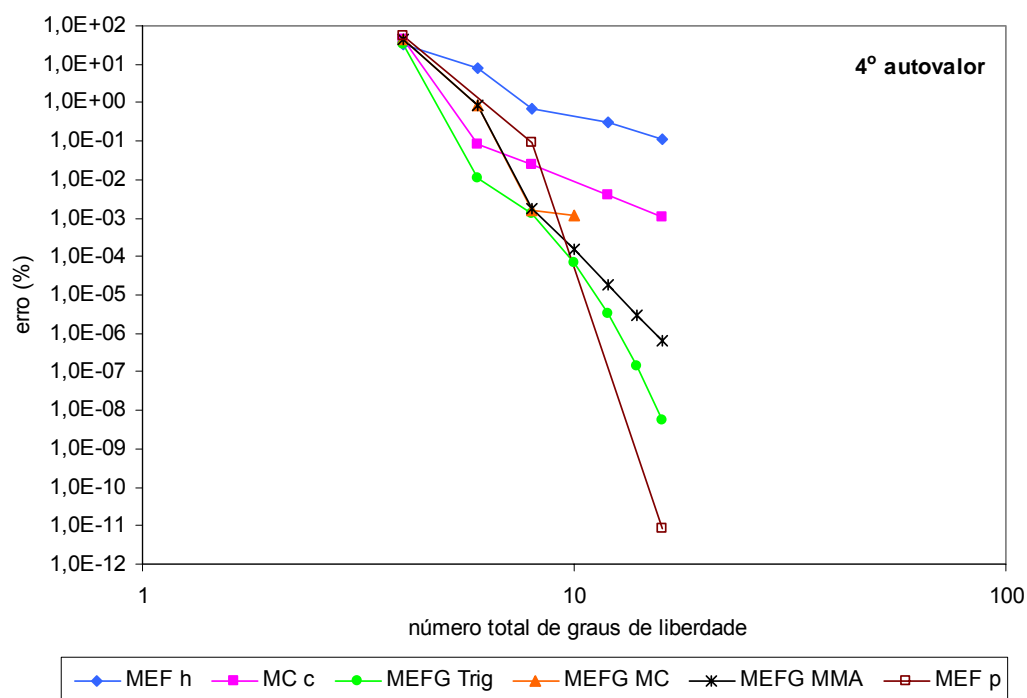


FIGURA 5.47 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE

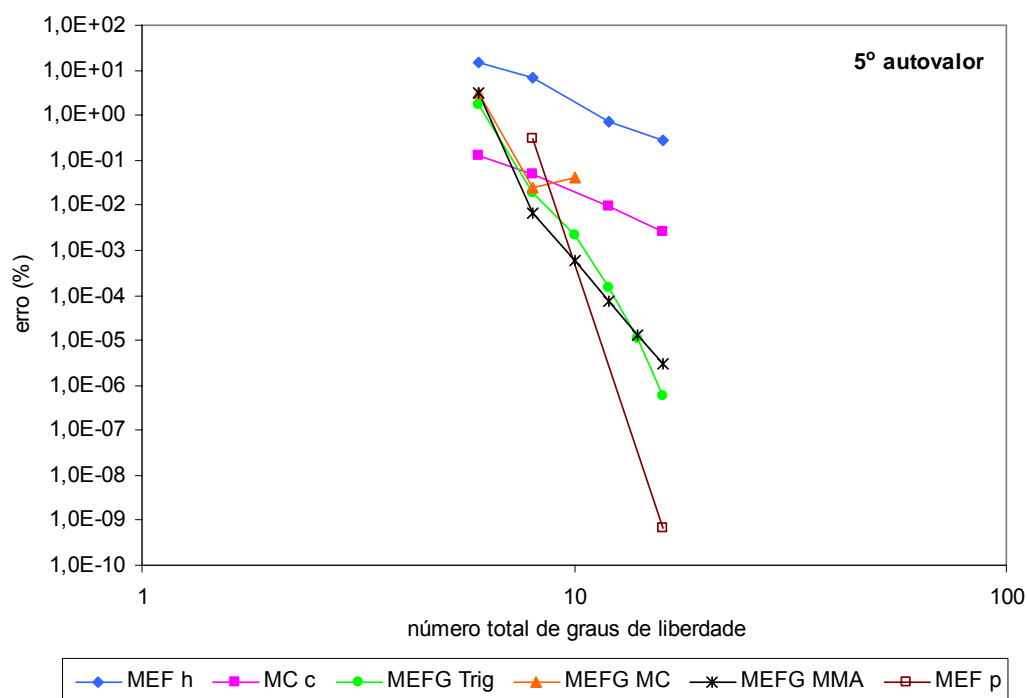


FIGURA 5.48 – ERRO RELATIVO DO 5º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE

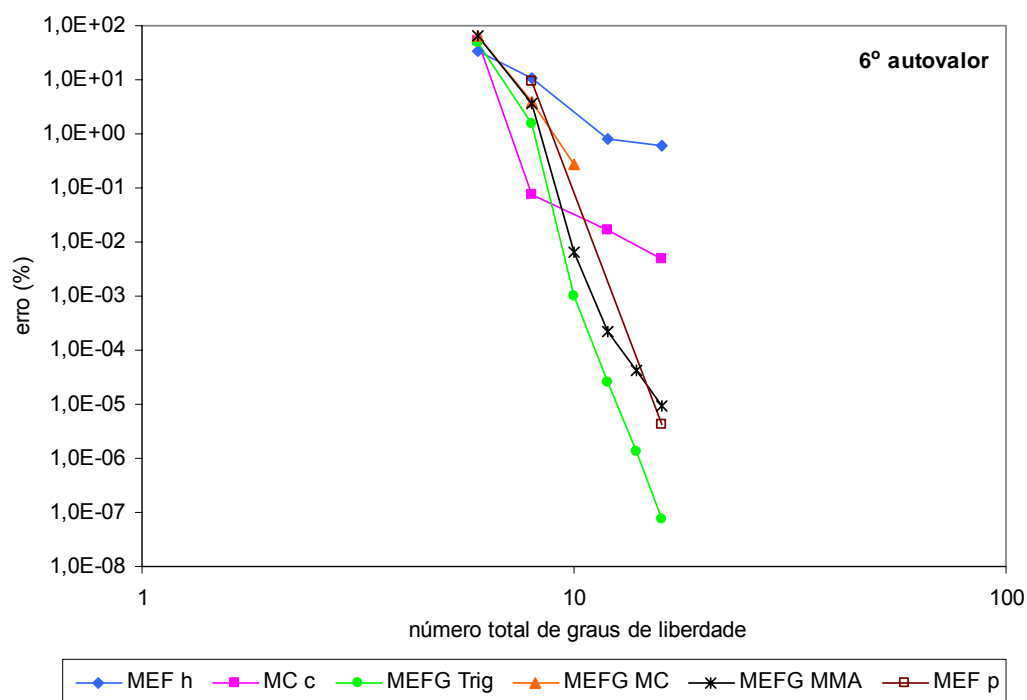


FIGURA 5.49 – ERRO RELATIVO DO 6° AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE

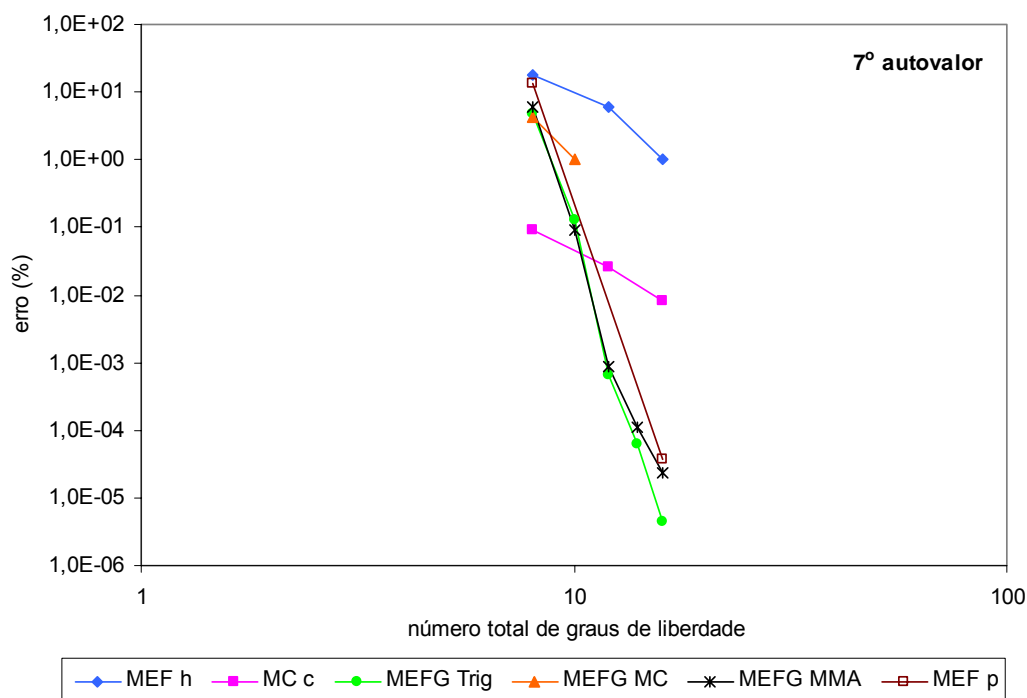


FIGURA 5.50 – ERRO RELATIVO DO 7° AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE



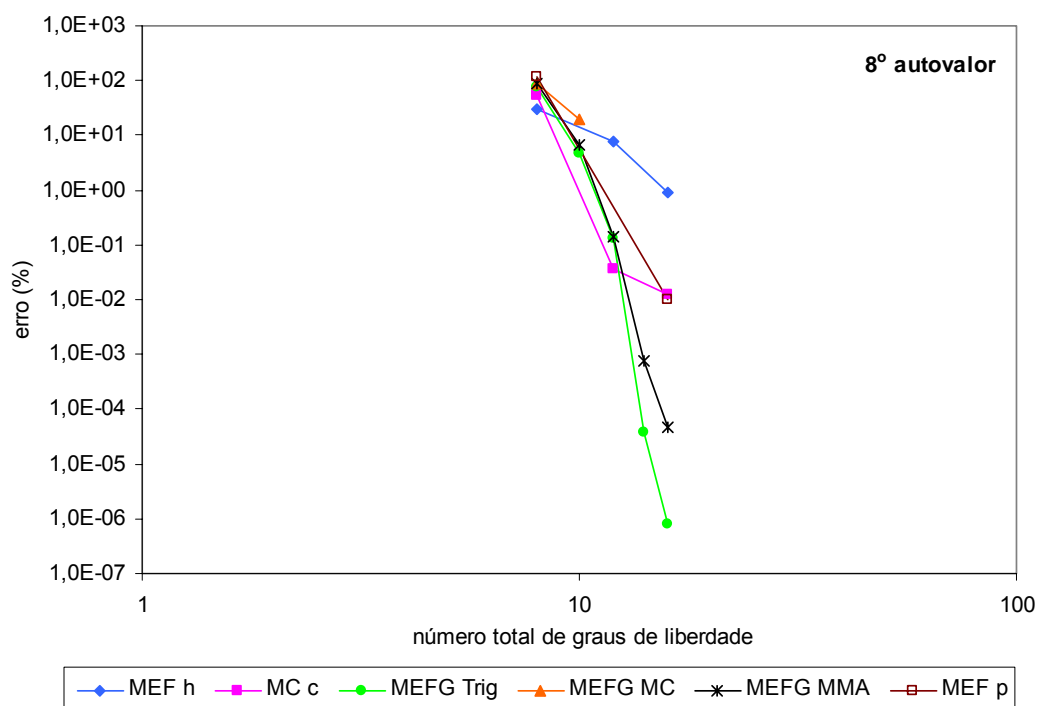


FIGURA 5.51 – ERRO RELATIVO DO 8º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE

O MEFG MC só pôde ser aplicado até um total de dez graus de liberdade, pois acima deste limite o método mostrou-se instável com a apresentação de modos espúrios. Esta instabilidade deve-se a erros de arredondamento resultantes das funções hiperbólicas contidas nas funções enriquecedoras. Por este motivo o MEFG MC não é utilizado nos exemplos seguintes, uma vez que pode ser substituído pelo MEFG MMA. O refinamento hierárquico  $p$  do MEF supera a precisão e a taxa de convergência dos resultados obtidos pelo MEFG para os cinco primeiros autovalores, porém, para os autovalores mais elevados, o MEFG MMA e o MEFG Trig apresentam resultados mais precisos e, em alguns casos, taxas de convergência maiores.

Comparando as versões do MEFG, verifica-se que até o terceiro autovalor o MEFG MMA é mais preciso que o MEFG Trig, porém esta situação se inverte para autovalores de ordem superior a três.

A tabela 5.15 apresenta os seis primeiros autovalores  $\chi_r$  obtidos pelos

métodos analisados com oito graus de liberdade efetivos, a fim de compará-los com os resultados obtidos pela versão senoidal do Método dos Elementos Finitos  $p$ -Fourier (MEF Fourier) apresentados por Leung e Chan (1998). Não são apresentados os erros relativos para o MEF Fourier no trabalho de Leung e Chan (1998), mas apenas os autovalores com quatro casas decimais conforme indicado na tabela.

TABELA 5.15 – AUTOVALORES PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE (8 GRAUS DE LIBERDADE)

$r$	Analítico	MEF Fourier *	MEFG MMA	MEFG Trig
	$\chi_r$	$\chi_r$	$\chi_r$	$\chi_r$
1	1,875104	1,8751	1,875104	1,875106
2	4,694091	4,6943	4,694092	4,694147
3	7,854757	7,8576	7,854785	7,855139
4	10,99554	11,0057	10,99573	10,99568
5	14,13717	14,1600	14,13810	14,13984
6	17,27876	17,3394	17,91309	17,53655

Nota: \* resultados obtidos por Leung e Chan (1998).

Observa-se que as duas versões do MEFG propostas são mais precisas que o MEF Fourier, com mesmo número de graus de liberdade, para os cinco primeiros autovalores analisados.

A tabela 5.16 apresenta os dez primeiros autovalores  $\chi_r$  obtidos pelos métodos analisados com 12 graus de liberdade efetivos, a fim de compará-los com a solução analítica e com os resultados obtidos pelo Método Composto Modificado (MC Modif), proposto por Lu e Law (2007), com o mesmo número de graus de liberdade. Não são apresentados os erros relativos para o MC Modif no trabalho de Lu e Law (2007), mas apenas os autovalores com sete dígitos significativos, conforme indicado na tabela.

A partir dos resultados apresentados na tabela 5.16, observa-se que os quatro primeiros autovalores obtidos pelas duas versões do MEFG e pelo MC Modif são quase idênticos à solução analítica. A partir do quinto autovalor a solução obtida pelo MC Modif é mais precisa que a obtida pelo MEFG. Cabe observar porém que a taxa de convergência do MEFG mostrada nos gráficos anteriores garante que a solução será significativamente mais precisa a medida que novos níveis de

enriquecimento forem acrescentados. Outro aspecto a salientar é o fato de que o MEFG nas formas propostas é aplicável a qualquer problema de viga de Euler-Bernoulli, enquanto a versão modificada de Lu e Law (2007) utiliza funções de enriquecimento específicas para cada problema, dependendo das condições de contorno impostas. Salienta-se também que nos métodos aproximados o erro na solução aumenta com a ordem do autovalor, como pode ser observado na equação (3.38) para o MEF. Esta deterioração na precisão dos resultados dos últimos autovalores obtidos na análise é observada em todos os métodos enriquecidos e no MEF  $p$ , porém no refinamento  $p$  do MEFG parece ser mais significativa para estes autovalores.

TABELA 5.16 – AUTOVALORES PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE (12 GRAUS DE LIBERDADE)

$r$	analítico	MEF $h$	MC	MC Modif *	MEFG MMA	MEFG Trig
	$\chi_r$	$\chi_r$	$\chi_r$	$\chi_r$	$\chi_r$	$\chi_r$
1	1,875104	1,875110	1,875104	1,875104	1,875104	1,875104
2	4,694091	4,694671	4,694100	4,694091	4,694091	4,694091
3	7,854757	7,861940	7,854858	7,854757	7,854758	7,854759
4	10,99554	11,03091	10,99599	10,99554	10,99554	10,99554
5	14,13717	14,24301	14,13846	14,13717	14,13718	14,13719
6	17,27876	17,42216	17,28160	17,27876	17,27880	17,27876
7	20,42035	21,63383	20,42556	20,42037	20,42053	20,42049
8	23,56194	25,35447	23,57031	23,56197	23,59441	23,59258
9	26,70354	29,63872	26,71559	26,70357	26,80519	26,87697
10	29,84513	34,47073	29,86097	29,84515	33,22886	33,03557

Nota: \* resultados obtidos por Lu e Law (2007).

Os resultados obtidos para os refinamentos  $h$  e  $p$  indicam que o MEFG MMA apresenta maior regularidade e excelente taxa de convergência. Porém, o MEFG Trig se destaca no refinamento  $p$  para autovalores de ordem superior a três. Observa-se também que para todos os autovalores o erro decresce muito rapidamente quando novas funções de enriquecimento são incorporadas ao MEFG (refinamento  $p$ ).

O método adaptativo proposto neste trabalho é analisado a seguir.

### 5.4.1.3 Refinamento adaptativo

Seis diferentes análises do MEFG Adaptativo com malha uniforme são realizadas a fim de obter as primeiras seis frequências naturais da viga. Para capturar uma primeira aproximação da frequência alvo desta viga, para a primeira e segunda frequências, a malha de elementos finitos deve ter no mínimo um elemento (dois graus de liberdade efetivos), para a terceira e quarta frequências, a malha deve ter no mínimo dois elementos (quatro graus de liberdade efetivos), e assim por diante. A evolução do erro relativo nas quatro primeiras análises com malhas mais refinadas que o mínimo ( $n_{gl} = alvo$ ) necessário, ou seja, com número de graus de liberdade da malha igual ao dobro da ordem da frequência alvo, é apresentada nas figuras 5.52 a 5.55.

Observa-se que o erro relativo do autovalor escolhido (alvo) diminui rapidamente e a partir da terceira iteração estabiliza-se com valor inferior a  $10^{-13} \%$ . As análises adaptativas convergem rapidamente e permitem melhorar a precisão da solução para a frequência alvo, mas melhoram também a precisão da solução de outras frequências, diferindo do comportamento do método para o elemento de barra.

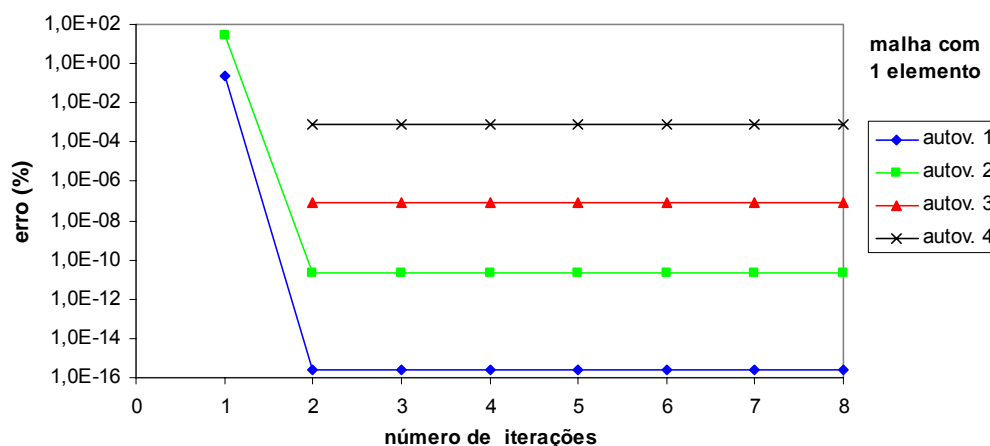


FIGURA 5.52 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE – ANÁLISE 1: 1ª FREQUÊNCIA ALVO

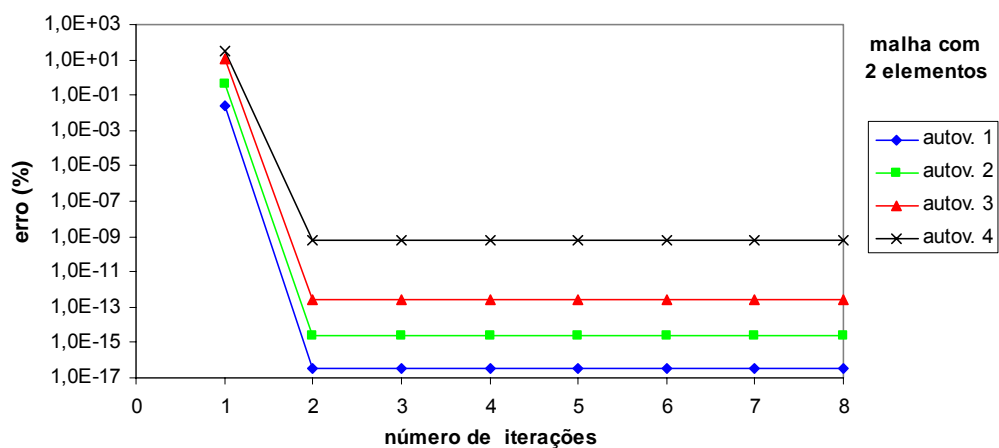


FIGURA 5.53 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE – ANÁLISE 2: 2ª FREQUÊNCIA ALVO

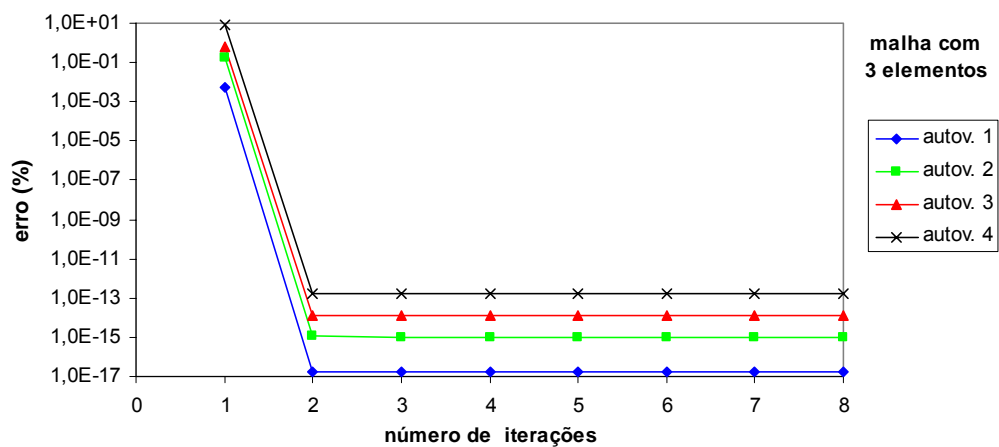


FIGURA 5.54 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE – ANÁLISE 3: 3ª FREQUÊNCIA ALVO

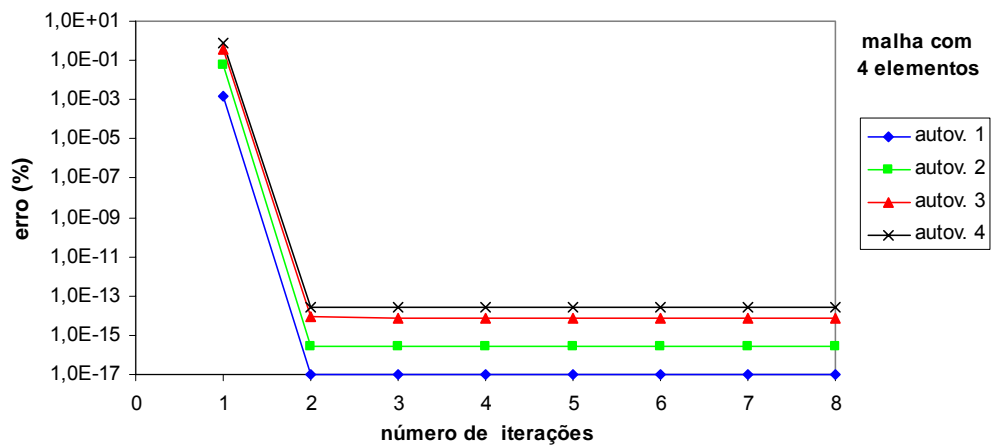


FIGURA 5.55 – ERRO DOS AUTOVALORES NO REFINAMENTO ADAPTATIVO DA VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE – ANÁLISE 4: 4ª FREQUÊNCIA ALVO

A tabela 5.17 apresenta os erros relativos obtidos pelas análises do MEFG Adaptativo com duas malhas diferentes.

TABELA 5.17 – ERROS RELATIVOS DO MEFG ADAPTATIVO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM DIFERENTES MALHAS

Autovalor	MEFG Adaptativo (após 3 iterações) Malha: $n_{gl} \geq$ alvo		MEFG Adaptativo (após 3 iterações) Malha: $n_{gl} = 2 \times$ alvo	
	erro (%)	$n_{gl}$ nas iterações <sup>(a)</sup>	erro (%)	$n_{gl}$ nas iterações <sup>(a)</sup>
1	2,375 e-16	1x 2 gl + 2x 10 gl	2,375 e-16	1x 2 gl + 2x 10 gl
2	1,078 e-10	1x 2 gl + 2x 10 gl	2,333 e-15	1x 4 gl + 2x 20 gl
3	1,452 e-11	1x 4 gl + 2x 20 gl	1,276 e-14	1x 6 gl + 2x 30 gl
4	4,729 e-10	1x 4 gl + 2x 20 gl	2,492 e-14	1x 8 gl + 2x 40 gl
5	9,125 e-11	1x 6 gl + 2x 30 gl	3,635 e-14	1x10 gl + 2x 50 gl
6	5,076 e-10	1x 6 gl + 2x 30 gl	4,622 e-14	1x12 gl + 2x 60 gl

Nota: (a)  $1 \times n \text{ gl} + 2 \times m \text{ gl}$  = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Observa-se que o refinamento da malha utilizada no processo aumenta a precisão alcançada nas análises adaptativas, embora os erros encontrados para a malha mais pobre já sejam bastante pequenos.

A tabela 5.18 apresenta os resultados obtidos com a utilização dos refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF, do refinamento  $c$  do MC, dos refinamentos  $p$  do MEFG Trig e MEFG MMA, e das análises do MEFG Adaptativo. A solução pelo MEF  $h$  é obtida com 50 elementos, ou seja, 100 graus de liberdade efetivos. O MEF  $p$  utiliza um elemento hierárquico de 17 nós, correspondendo a 32 graus de liberdade. O MC também utiliza apenas um elemento e 58 funções enriquecedoras, que correspondem a dois graus de liberdade nodais e 58 graus de liberdade de campo. O MEFG MMA e o MEFG Trig utilizam um elemento e sete níveis de enriquecimento ( $n_l = 7$ ), que correspondem a dois graus de liberdade nodais e 14 graus de liberdade de campo. As análises pelo MEFG Adaptativo apresentadas nesta tabela utilizam número de graus de liberdade da malha igual ao dobro da ordem da frequência alvo. Por exemplo, a quarta frequência é obtida utilizando malha com quatro elementos (oito graus de liberdade) e o processo adaptativo utiliza oito graus de liberdade na primeira iteração e 40 graus de liberdade nas duas iterações subsequentes.

TABELA 5.18 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE

Autovalor	MEF $h$ (50e) ngl = 100	MEF $p$ (1e 17n) ngl <sup>(a)</sup> = 32	MC $c$ (1e 58c) ngl = 60	MEFG Trig $p$ (1e 7nl) ngl = 16	MEFG MMA $p$ (1e 7nl) ngl = 16	MEFG Adaptativo <sup>(b)</sup> ngl = 2 x alvo (após 3 iterações)	
	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	ngl nas iterações
1	4,623 e-7	3,303 e-17	1,753 e-7	6,138 e-10	2,773 e-11	2,375 e-16	1x 2 gl + 2x 10 gl
2	2,622 e-6	1,135 e-15	1,164 e-8	5,010 e-9	4,199 e-9	2,333 e-15	1x 4 gl + 2x 20 gl
3	2,112 e-5	7,397 e-15	3,702 e-7	4,548 e-8	8,848 e-8	1,276 e-14	1x 6 gl + 2x 30 gl
4	8,101 e-5	1,943 e-14	1,676 e-6	5,725 e-9	6,592 e-7	2,492 e-14	1x 8 gl + 2x 40 gl
5	2,211 e-4	3,892 e-14	4,710 e-6	5,682 e-7	2,899 e-6	3,635 e-14	1x10 gl + 2x 50 gl
6	4,927 e-4	5,778 e-12	1,067 e-5	7,460 e-8	9,179 e-6	4,622 e-14	1x12 gl + 2x 60 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;  
 (b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Observa-se que a precisão alcançada pelo MEFG Adaptativo é semelhante à obtida pelo refinamento  $p$  do MEF, e maior do que a obtida pelos refinamentos  $h$  do MEF e pelo refinamento  $c$  do MC com número de graus de liberdade maior.

A figura 5.56 apresenta o segundo modo de vibração obtido nas duas primeiras iterações da análise 2 (2ª frequência alvo) do MEFG Adaptativo, com uma malha de dois elementos, a fim de ilustrar o efeito do processo adaptativo do MEFG sobre os modos de vibração da viga.

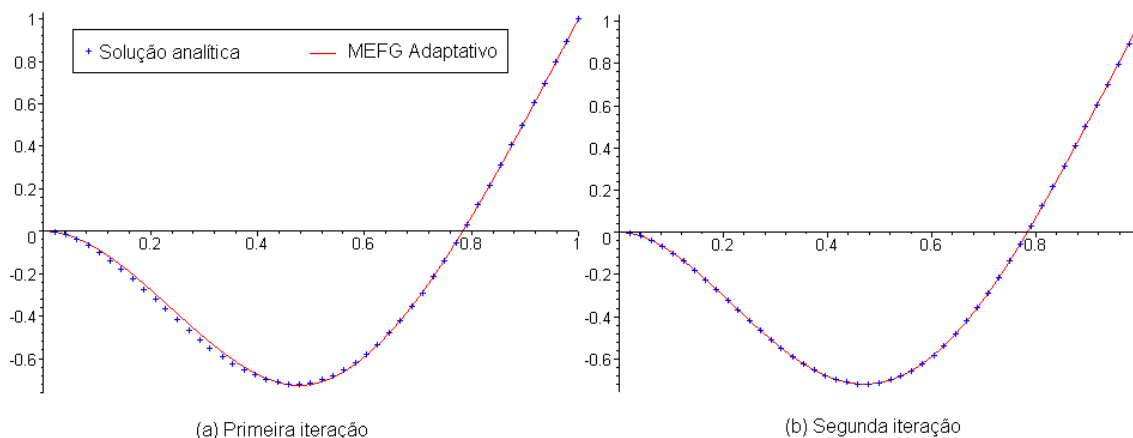


FIGURA 5.56 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE NAS DUAS PRIMEIRAS ITERAÇÕES DO MEFG ADAPTATIVO – ANÁLISE 2: 2ª FREQUÊNCIA ALVO

Observa-se que o modo de vibração aproximado do MEEG Adaptativo converge para o modo analítico e, a partir da segunda iteração estes modos são coincidentes.

#### 5.4.2 Viga uniforme simplesmente apoiada

A viga com seção transversal uniforme simplesmente apoiada (figura 5.57), com comprimento  $L$ , módulo de elasticidade  $E$ , massa específica  $\rho$ , momento de inércia  $I$  e área da seção transversal  $A$ , tem frequências ( $\omega_r$ ) e modos ( $u_r$ ) naturais de vibração analíticos obtidos pelas expressões:

$$\kappa_r = \frac{r\pi}{L}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.56)$$

$$\kappa_r = \sqrt[4]{\frac{\omega_r^2 \rho A}{EI}} \quad (5.57)$$

$$u_r(x) = a \sin(\kappa_r x), \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.58)$$

sendo  $a$  uma constante.

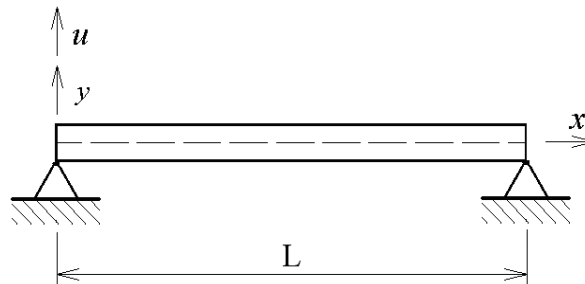


FIGURA 5.57 – VIGA UNIFORME BI-ROTULADA

O autovalor adimensional  $\chi_r = \kappa_r \cdot L$  é utilizado para comparar a solução analítica com as soluções aproximadas.



### 5.4.2.1 Refinamento $p$

As figuras 5.58 a 5.65 apresentam os gráficos de evolução do erro relativo dos refinamentos  $p$  hierárquicos do MEFG MMA, MEFG Trig e MEF, além do refinamento  $c$  do MC, para os oito primeiros autovalores, em relação ao número total de graus de liberdade, ambos em escala logarítmica. Nestas análises são utilizadas malhas formadas por um único elemento.

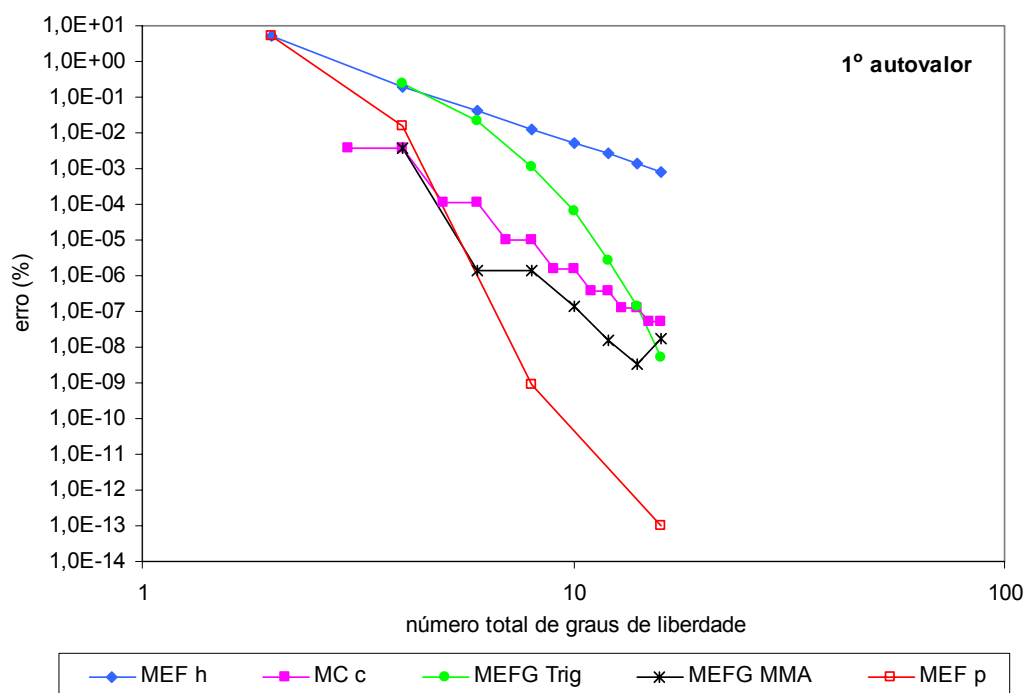


FIGURA 5.58 – ERRO RELATIVO DO 1º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME SIMPLEMENTE APOIADA

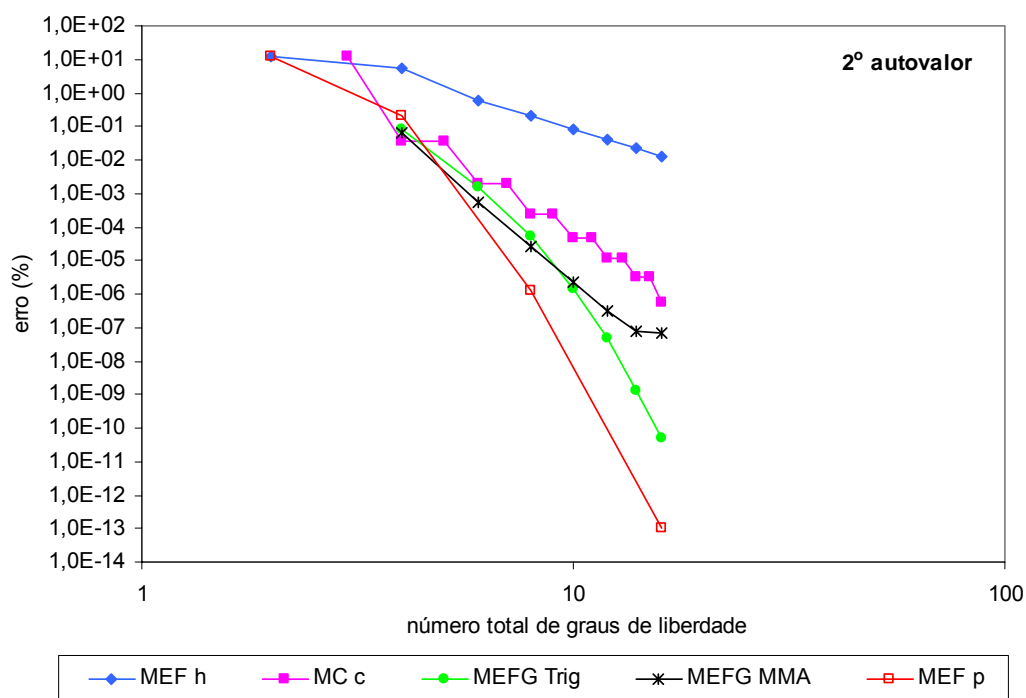


FIGURA 5.59 – ERRO RELATIVO DO 2º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME SIMPLEMENTE APOIADA

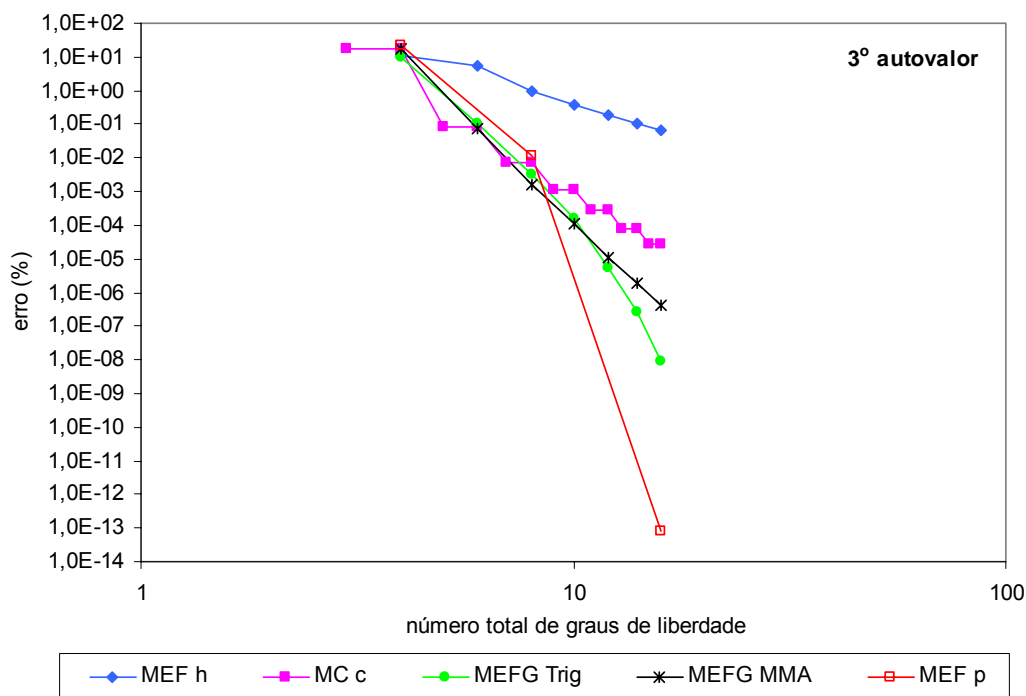


FIGURA 5.60 – ERRO RELATIVO DO 3º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME SIMPLEMENTE APOIADA

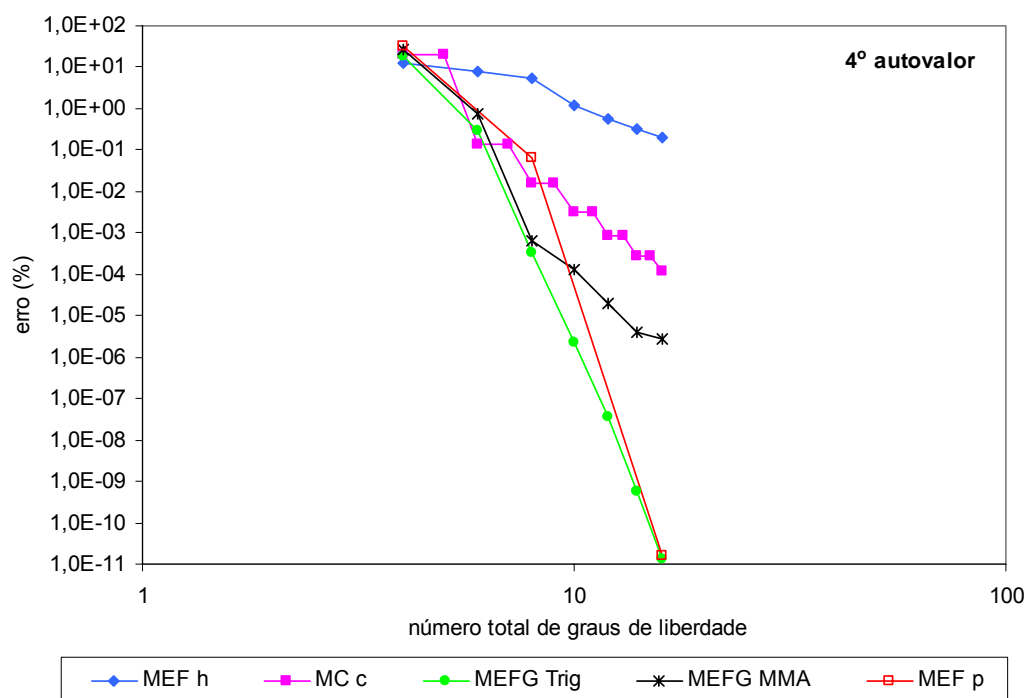


FIGURA 5.61 – ERRO RELATIVO DO 4º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME SIMPLEMENTE APOIADA

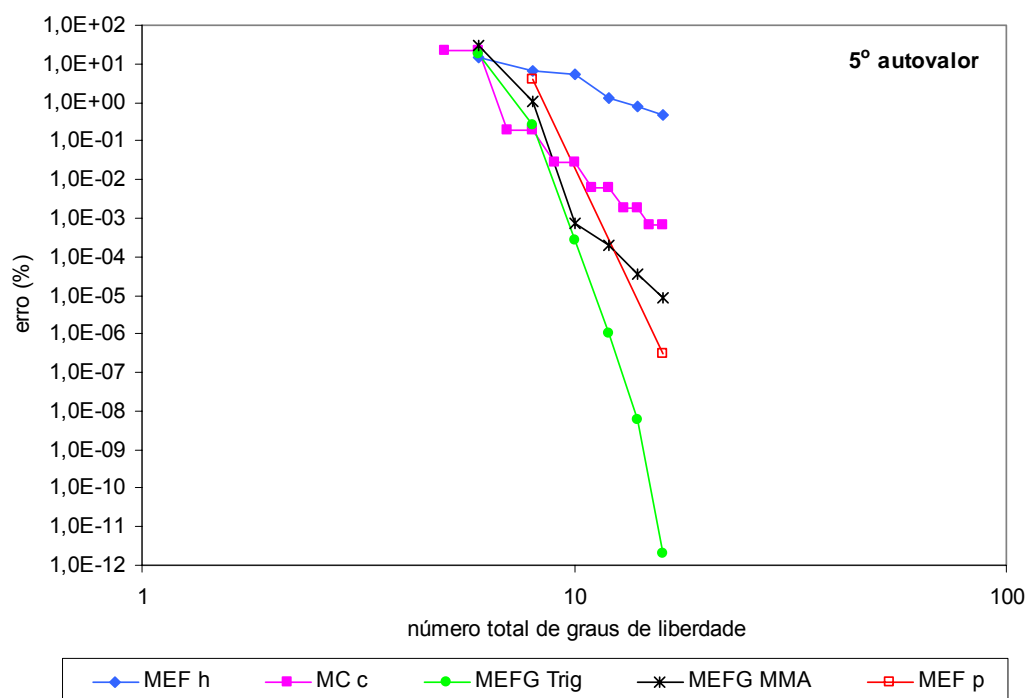


FIGURA 5.62 – ERRO RELATIVO DO 5º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME SIMPLEMENTE APOIADA

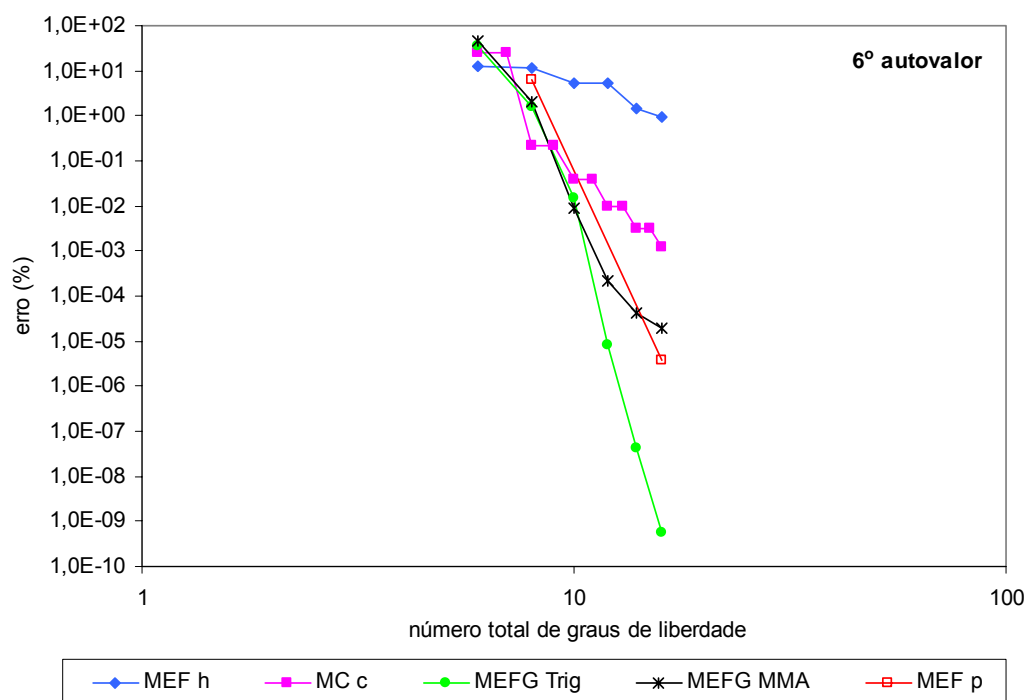


FIGURA 5.63 – ERRO RELATIVO DO 6º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME SIMPLEMENTE APOIADA

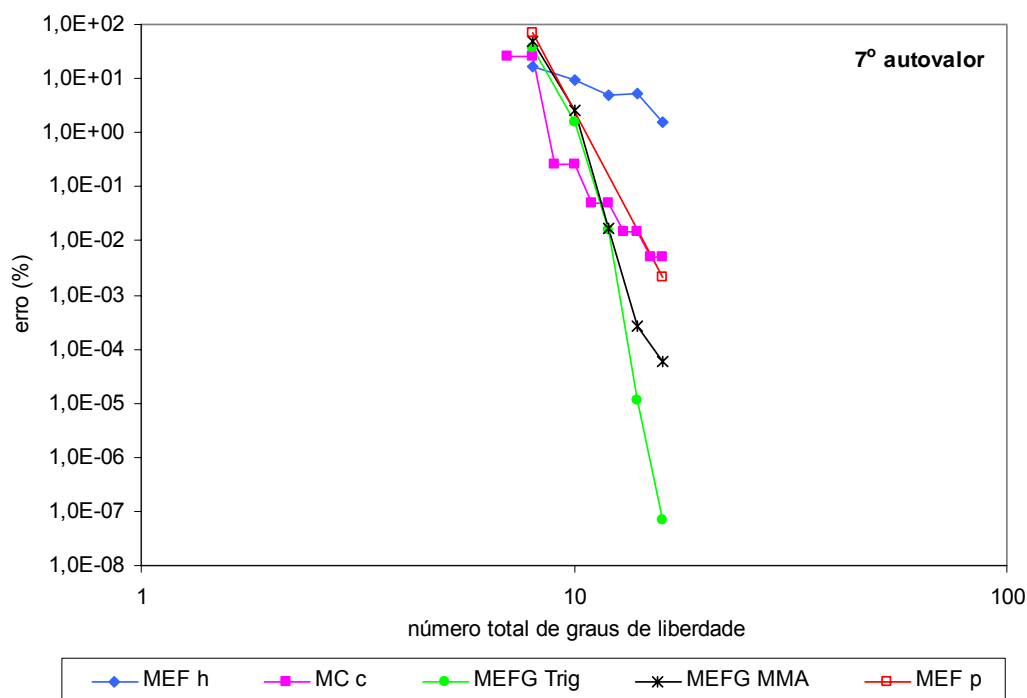


FIGURA 5.64 – ERRO RELATIVO DO 7º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME SIMPLEMENTE APOIADA

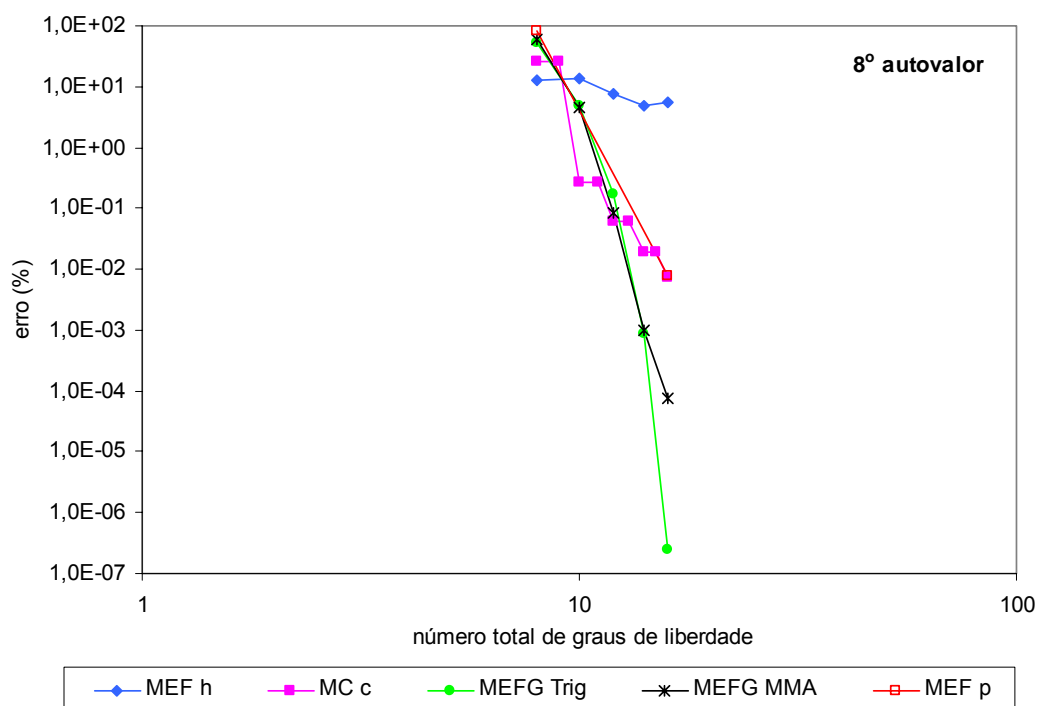


FIGURA 5.65 – ERRO RELATIVO DO 8º AUTOVALOR – REFINAMENTO  $p$  – VIGA UNIFORME SIMPLEMENTE APOIADA

Os resultados obtidos mostram que as duas formas do MEFG apresentam resultados mais precisos que o refinamento  $h$  do MEF e o refinamento  $c$  do MC para todos os autovalores analisados, com exceção do primeiro autovalor. Na análise do primeiro autovalor o MEFG Trig apresenta resultados menos precisos que o MC, superando-os em precisão apenas com 16 graus de liberdade. O MEFG Trig apresenta taxas de convergência superiores às taxas do refinamento  $h$  do MEF e do refinamento  $c$  do MC. Já o MEFG MMA apresenta taxas de convergência superiores ao refinamento  $h$  do MEF e semelhantes às taxas do MC. O refinamento hierárquico  $p$  do MEF supera a precisão e a taxa de convergência obtidas pelo MEFG para os quatro primeiros autovalores, porém para os autovalores mais elevados o MEFG Trig apresenta as maiores taxas de convergência e os resultados mais precisos. O MEFG MMA supera o refinamento  $p$  do MEF a partir do sétimo autovalor, porém apresenta resultados menos precisos que o MEFG Trig. Novamente observa-se que o refinamento  $p$  do MEFG Trig se destaca para autovalores de ordem superior a três.

### 5.4.2.2 Refinamento adaptativo

Seis diferentes análises do MEFG Adaptativo com malha uniforme são realizadas a fim de obter as primeiras seis frequências naturais da viga. Em todos os casos analisados neste trabalho, verifica-se que o processo adaptativo para vigas influencia na convergência de um grupo de frequências além da frequência alvo, assim como observado no exemplo anterior (figuras 5.52 a 5.55). Assim, a partir deste exemplo será apresentado apenas o comportamento da frequência alvo em cada análise. A evolução do erro relativo dos autovalores alvo nas seis análises adaptativas com número de graus de liberdade da malha igual ao dobro da ordem da frequência alvo é apresentada na figura 5.66.

Observa-se que o erro relativo do autovalor alvo diminui rapidamente e a partir da terceira iteração estabiliza-se com valor inferior a  $10^{-12}$  %.

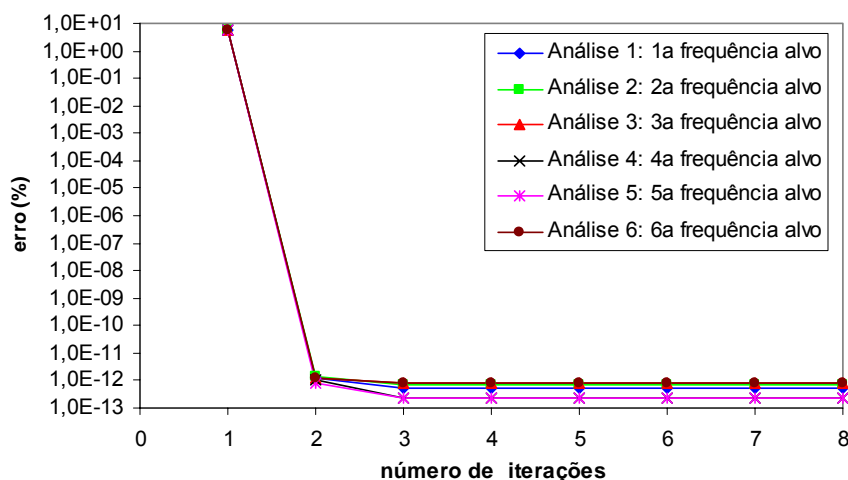


FIGURA 5.66 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – VIGA UNIFORME SIMPLEMENTE APOIADA

A tabela 5.19 apresenta os erros relativos dos autovalores adimensionais obtidos pelo MEFG Adaptativo com duas malhas diferentes. Já a tabela 5.20 apresenta os resultados obtidos com a utilização dos refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF, do refinamento  $c$  do MC, dos refinamentos  $p$  do MEFG Trig e MEFG MMA, e das análises do MEFG Adaptativo. As análises utilizam as mesmas malhas e os mesmos

enriquecimentos descritos no exemplo anterior.

TABELA 5.19 – ERROS RELATIVOS DO MEFG ADAPTATIVO PARA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA COM DIFERENTES MALHAS

Autovalor	MEFG Adaptativo (após 3 iterações) Malha inicial: ngl ≥ alvo		MEFG Adaptativo (após 3 iterações) Malha inicial: ngl = 2 x alvo	
	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(a)</sup>	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(a)</sup>
1	5,372 e-13	1x 2 gl + 2x 10 gl	5,372 e-13	1x 2 gl + 2x 10 gl
2	9,895 e-14	1x 2 gl + 2x 10 gl	6,927 e-13	1x 4 gl + 2x 20 gl
3	5,487 e-11	1x 4 gl + 2x 20 gl	7,539 e-13	1x 6 gl + 2x 30 gl
4	5,796 e-13	1x 4 gl + 2x 20 gl	2,262 e-13	1x 8 gl + 2x 40 gl
5	1,199 e-10	1x 6 gl + 2x 30 gl	2,149 e-13	1x10 gl + 2x 50 gl
6	3,204 e-13	1x 6 gl + 2x 30 gl	7,539 e-13	1x12 gl + 2x 60 gl

Nota: (a) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Novamente observa-se que o refinamento da malha utilizada no processo aumenta a precisão alcançada nas análises adaptativas.

TABELA 5.20 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA UNIFORME SIMPLEMENTE APOIADA

Autovalor	MEF $h$ (50e) ngl = 100	MEF $p$ (1e 17n) ngl <sup>(a)</sup> = 32	MC $c$ (1e 58c) ngl = 60	MEFG Trig $p$ (1e 7nl) ngl = 16	MEFG MMA $p$ (1e 7nl) ngl = 16	MEFG Adaptativo ngl = 2 x alvo (após 3 iterações)	
	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	<sup>(b)</sup> ngl nas iterações
1	5,490 e-7	9,895 e-14	1,281 e-8	5,277 e-9	1,738 e-8	5,372 e-13	1x 2 gl + 2x 10 gl
2	8,635 e-6	9,895 e-14	1,079 e-6	5,114 e-11	6,840 e-8	6,927 e-13	1x 4 gl + 2x 20 gl
3	4,380 e-5	9,424 e-14	1,112 e-6	9,377 e-9	4,013 e-7	7,539 e-13	1x 6 gl + 2x 30 gl
4	1,383 e-4	5,796 e-13	7,347 e-6	1,375 e-11	2,748 e-6	2,262 e-13	1x 8 gl + 2x 40 gl
5	3,373 e-4	1,052 e-12	7,649 e-8	2,126 e-12	8,700 e-6	2,149 e-13	1x10 gl + 2x 50 gl
6	6,985 e-4	6,672 e-12	1,455 e-5	5,424 e-10	1,926 e-5	7,539 e-13	1x12 gl + 2x 60 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;

(b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Observa-se novamente que a precisão alcançada pelo MEFG Adaptativo é semelhante à obtida pelo refinamento  $p$  do MEF, e maior do que a precisão obtida pelos refinamentos  $h$  do MEF e pelo refinamento  $c$  do MC com número de graus de

liberdade maior.

#### 5.4.3 Viga uniforme engastada-livre com massa concentrada na extremidade

Nesta seção é analisada a vibração transversal livre de uma viga engastada-livre, de seção transversal uniforme, com uma massa ( $m$ ) concentrada na extremidade livre (figura 5.67). A viga tem comprimento  $L$ , módulo de elasticidade  $E$ , massa específica  $\rho$ , momento de inércia  $I$ , área da seção transversal  $A$  e massa concentrada  $m = 10\rho AL$ . Considera-se aqui a massa concentrada sem inércia rotacional.

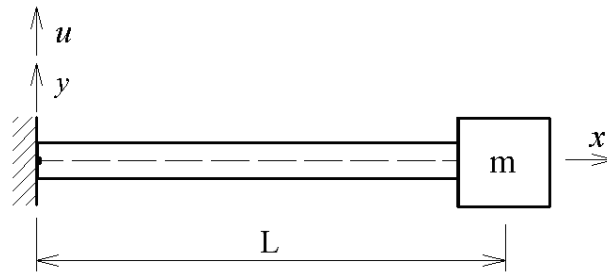


FIGURA 5.67 – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA NA EXTREMIDADE

##### 5.4.3.1 Solução analítica

Aplicando as condições de contorno às equações governantes do problema, obtém-se a equação da frequência:

$$\frac{\kappa m (\sin(\kappa L) \cosh(\kappa L) - \cos(\kappa L) \sinh(\kappa L)) - \rho A (1 + \cos(\kappa L) \cosh(\kappa L))}{\cos(\kappa L) + \cosh(\kappa L)} = 0 \quad (5.59)$$

$$\kappa^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \quad (5.60)$$

cujas raízes fornecem as frequências naturais de vibração da viga. Os modos naturais de vibração são dados por:



$$u(x) = a \{ \sin(\kappa x) - \sinh(\kappa x) - \alpha [\cos(\kappa x) - \cosh(\kappa x)] \} \quad (5.61)$$

$$\alpha = \frac{\sinh(\kappa L) + \sin(\kappa L)}{\cosh(\kappa L) + \cos(\kappa L)} \quad (5.62)$$

sendo  $a$  uma constante.

Os dez primeiros autovalores adimensionais  $\chi_r = \kappa_r \cdot L$  obtidos para esta viga estão listados na tabela 5.21.

TABELA 5.21 – SOLUÇÃO ANALÍTICA DOS AUTOVALORES DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA

Autovalor	Solução analítica
$\chi_1$	0,7357819194
$\chi_2$	3,9384658333
$\chi_3$	7,0756163670
$\chi_4$	10,2150464784
$\chi_5$	13,3554985900
$\chi_6$	16,4963832300
$\chi_7$	19,6374937628
$\chi_8$	22,7787369569
$\chi_9$	25,9200646834
$\chi_{10}$	29,0614495813

#### 5.4.3.2 Solução aproximada

A partir deste exemplo dedica-se maior atenção à análise do desempenho do processo adaptativo. O MEFG Trig também é analisado por se tratar do refinamento  $p$  do MEFG com melhor desempenho, principalmente a partir da terceira frequência.

Sete diferentes análises do MEFG Adaptativo com malha uniforme são realizadas a fim de obter as primeiras seis e a décima frequências naturais da viga. A tabela 5.22 apresenta os erros relativos dos seis primeiros autovalores obtidos com a utilização do MEFG Adaptativo com duas malhas diferentes.

A evolução do erro relativo dos autovalores alvo  $\chi_r = \kappa_r \cdot L$  nas seis análises adaptativas com número de graus de liberdade da malha igual ao dobro da ordem da frequência alvo é apresentada na figura 5.68.

TABELA 5.22 – ERROS RELATIVOS DO MEFG ADAPTATIVO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA PARA DIFERENTES MALHAS

Autovalor	MEFG Adaptativo (após 3 iterações) Malha: $ngl \geq$ alvo		MEFG Adaptativo (após 3 iterações) Malha: $ngl = 2 \times$ alvo	
	erro (%)	ngl nas iterações	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(a)</sup>
1	4,750 e-19	1x 2 gl + 2x 10 gl	4,750 e-19	1x 2 gl + 2x 10 gl
2	4,826 e-12	1x 2 gl + 2x 10 gl	2,043 e-16	1x 4 gl + 2x 20 gl
3	2,259 e-12	1x 4 gl + 2x 20 gl	3,740 e-15	1x 6 gl + 2x 30 gl
4	4,502 e-11	1x 4 gl + 2x 20 gl	1,262 e-14	1x 8 gl + 2x 40 gl
5	2,246 e-11	1x 6 gl + 2x 30 gl	2,502 e-14	1x10 gl + 2x 50 gl
6	9,334 e-11	1x 6 gl + 2x 30 gl	3,885 e-14	1x12 gl + 2x 60 gl

Nota: (a)  $1x\ n\ gl + 2x\ m\ gl$  = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

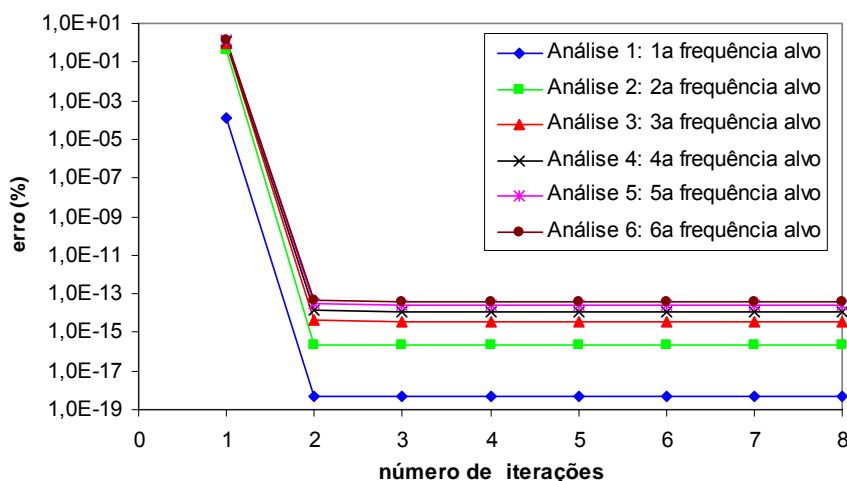


FIGURA 5.68 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – VIGA ENGASTADA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA

Os mesmos comentários feitos para as vigas uniformes engastada-livre e simplesmente apoiada valem para esta viga no que se refere à malha de elementos finitos e à convergência do processo.

A tabela 5.23 apresenta os resultados obtidos pelos refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF, pelo refinamento  $c$  do MC, pelo refinamento  $p$  do MEFG Trig e pelas análises do MEFG Adaptativo. A solução pelo MEF  $h$  é obtida com 50 elementos. O MEF  $p$  utiliza um elemento hierárquico de 17 nós. O MC também utiliza apenas um elemento e 58 funções enriquecedoras. O MEFG Trig utiliza um elemento e 15 níveis de enriquecimento ( $n_l = 15$ ). As análises pelo MEFG Adaptativo utilizam número de graus de liberdade da malha igual ao dobro da ordem da frequência alvo, com

exceção da análise para a décima frequência que utiliza malha com dez graus de liberdade.

TABELA 5.23 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE COM MASSA CONCENTRADA

Autovalor	MEF $h$ (50e) ngl = 100	MEF $p$ (1e 17n) ngl <sup>(a)</sup> = 32	MC $c$ (1e 58c) ngl = 60	MEFG Trig $p$ (1e 15nl) ngl = 32	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(b)</sup>
1	8,566 e-7	4,585 e-16	4,074 e-13	2,023 e-17	4,750 e-19	1x 2 gl + 2x 10 gl
2	1,335 e-6	4,534 e-15	9,706 e-9	5,856 e-17	2,043 e-16	1x 4 gl + 2x 20 gl
3	1,387 e-5	1,472 e-14	1,031 e-6	7,980 e-16	3,740 e-15	1x 6 gl + 2x 30 gl
4	6,031 e-5	2,587 e-14	9,972 e-7	7,444 e-16	1,262 e-14	1x 8 gl + 2x 40 gl
5	1,762 e-4	3,986 e-14	2,206 e-6	6,740 e-15	2,502 e-14	1x10 gl + 2x 50 gl
6	4,099 e-4	3,640 e-12	2,656 e-6	6,030 e-13	3,885 e-14	1x12 gl + 2x 60 gl
10	3,925 e-3	1,654 e-8	9,166 e-6	1,381 e-12	1,249 e-10	1x10 gl + 2x 50 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;  
(b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Observa-se que a precisão alcançada pelo MEFG Adaptativo é maior do que a obtida pelos refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF e pelo refinamento  $c$  do MC. O MEFG Trig com 32 graus de liberdade apresenta melhor precisão que todos os demais métodos, com exceção do MEFG Adaptativo para o primeiro e sexto autovalores. Porém, prosseguindo-se as análises para autovalores de ordem superior a dez verifica-se que o erro do MEFG Trig aumenta substancialmente, gerando resultados menos precisos que os demais métodos.

#### 5.4.4 Viga uniforme bi-engastada com rótula interna

Neste tópico é analisada a vibração transversal livre de uma viga de seção transversal uniforme bi-engastada com rótula interna, conforme figura 5.69. A viga tem comprimento  $L = 1$  m, módulo de elasticidade  $E$ , massa específica  $\rho$ , momento de inércia  $I$  e área da seção transversal  $A$ .

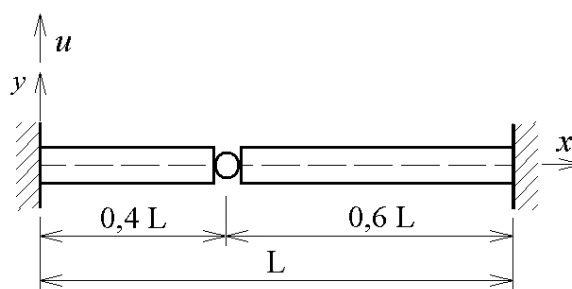


FIGURA 5.69 – VIGA UNIFORME BI-ENGASTADA COM RÓTULA INTERNA

#### 5.4.4.1 Solução analítica

O problema de vibração livre desta viga pode ser resolvido analiticamente considerando-se duas vigas engastadas-rotuladas de comprimentos  $0,4 L$  e  $0,6 L$ , e adotando-se condições de acoplamento de deslocamento vertical e esforço cortante, e momento fletor nulo para a extremidade comum (rótula).

Para o problema proposto, os seis primeiros autovalores adimensionais analíticos  $\chi_r = \kappa_r L$  (conforme equação (5.60)) estão listados na tabela 5.24.

TABELA 5.24 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DOS AUTOVALORES DA VIGA BI-ENGASTADA COM RÓTULA INTERNA

Autovalor	Solução analítica
$\chi_1$	3,9534079085
$\chi_2$	7,1806531805
$\chi_3$	10,5609868273
$\chi_4$	12,7203449873
$\chi_5$	17,2332234872
$\chi_6$	19,0474875148

#### 5.4.4.2 Solução aproximada

Na solução aproximada utilizando o MEF, o MC e o MEFG, a rótula interna é simulada pela consideração de um grau de liberdade nodal de rotação independente para cada elemento em que um dos nós coincida com o nó rotulado. Isto corresponde a não acoplar as contribuições elementares das matrizes de rigidez e de massa referentes ao grau de liberdade de rotação considerado liberado (rótula).

Para verificação do desempenho do MEFG Adaptativo na análise da vibração livre desta viga, foram realizadas seis análises adaptativas para determinação das seis primeiras frequências, utilizando em cada análise uma malha com quatro elementos.

A figura 5.70 apresenta a evolução do erro relativo do autovalor alvo, em função do número de iterações, para as seis análises do MEFG Adaptativo realizadas. Na análise 1 foi tomada a primeira frequência como alvo, na análise 2 a segunda frequência como alvo, e assim por diante.

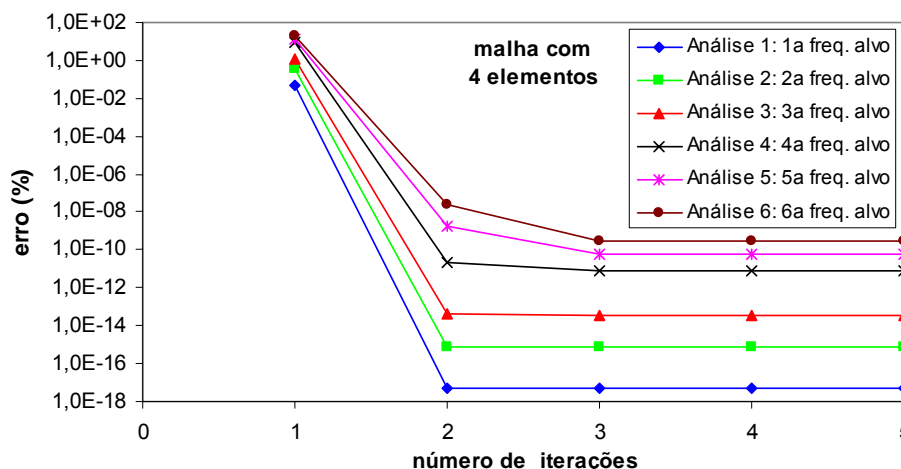


FIGURA 5.70 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – VIGA COM RÓTULA INTERNA

Observa-se novamente que em todas as análises adaptativas o erro relativo do autovalor alvo diminui rapidamente e a partir da terceira iteração estabiliza-se com valor inferior a  $10^{-9}$  %. Observa-se também que, para uma mesma malha, o erro relativo aumenta com o aumento da ordem da frequência alvo.

A tabela 5.25 apresenta os resultados obtidos pelos refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF, pelo refinamento  $c$  do MC, pelo refinamento  $p$  do MEFG Trig e pelas análises do MEFG Adaptativo. A solução pelo MEF  $h$  é obtida com 52 elementos. O MEF  $p$  utiliza dois elementos hierárquicos de nove nós. O MC também utiliza dois elementos e 30 funções enriquecedoras. O MEFG Trig utiliza dois elementos e sete níveis de enriquecimento ( $n_l = 7$ ).

TABELA 5.25 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA COM RÓTULA INTERNA

Autovalor	MEF $h$ (52e) ngl = 103	MEF $p$ (2e 9n) ngl <sup>(a)</sup> = 31	MC $c$ (2e 30c) ngl = 63	MEFG Trig $p$ (2e 7nl) ngl = 31	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(b)</sup>
1	1,694 e-6	9,943 e-18	5,428 e-8	1,165 e-9	5,435 e-18	1x 7 gl + 2x 39 gl
2	2,102 e-5	1,126 e-16	2,692 e-7	9,044 e-9	7,784 e-16	1x 7 gl + 2x 39 gl
3	5,737 e-5	1,425 e-16	8,684 e-7	7,809 e-9	3,402 e-14	1x 7 gl + 2x 39 gl
4	2,084 e-4	2,478 e-16	4,051 e-6	2,406 e-8	7,862 e-12	1x 7 gl + 2x 39 gl
5	6,615 e-4	8,580 e-13	7,391 e-7	3,613 e-8	5,453 e-11	1x 7 gl + 2x 39 gl
6	6,293 e-4	8,026 e-12	2,695 e-5	2,149 e-8	3,019 e-10	1x 7 gl + 2x 39 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;

(b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Os resultados obtidos pelo MEFG Adaptativo são mais precisos que os obtidos pelos refinamentos  $h$  do MEF e  $c$  do MC, com número de graus de liberdade superior. Os resultados também foram próximos aos obtidos pelo refinamento  $p$  do MEF com 31 graus de liberdade para os dois primeiros autovalores e piores para os demais, porém com erros inferiores a  $4 \times 10^{-10}$  %.

O MEFG Trig com 31 graus de liberdade apresenta melhor precisão que o refinamento  $h$  do MEF com 103 graus de liberdade e que o refinamento  $c$  do MC com 63 graus de liberdade.

#### 5.4.5 Viga engastada-rotulada composta por dois materiais diferentes

Neste tópico é estudado o problema de vibração livre de uma viga engastada-rotulada composta por dois materiais diferentes (figura 5.71). Os vãos da viga têm comprimentos  $L_1 = 0,4$  m e  $L_2 = 0,6$  m, módulos de elasticidade  $E_1$  e  $E_2$ , áreas de seção transversal  $A_1$  e  $A_2$ , e massas específicas  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , com as seguintes relações:

$$\alpha_v = \sqrt[4]{\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}} = 0,9 \quad (5.63)$$

$$\phi_V = \sqrt[4]{\frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1}} = 0,7 \quad (5.64)$$

$$\theta_V = \frac{\phi_V}{\alpha_V} = \frac{7}{9} \quad (5.65)$$

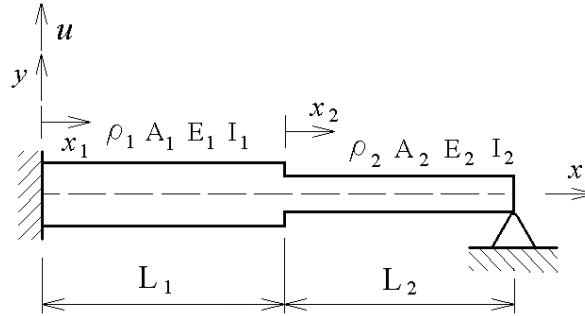


FIGURA 5.71 – VIGA ENGASTADA-ROTULADA BIMATERIAL

#### 5.4.5.1 Solução analítica

No problema proposto, a viga tem como solução geral as expressões:

$$u_1(x) = b_1 \sin(\kappa_1 x_1) + b_2 \cos(\kappa_1 x_1) + b_3 \sinh(\kappa_1 x_1) + b_4 \cosh(\kappa_1 x_1) \quad (5.66)$$

$$u_2(x) = c_1 \sin(\kappa_2 x_2) + c_2 \cos(\kappa_2 x_2) + c_3 \sinh(\kappa_2 x_2) + c_4 \cosh(\kappa_2 x_2) \quad (5.67)$$

$$\kappa_1 = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho_1 A_1}{E_1 I_1}} \quad (5.68)$$

$$\kappa_2 = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho_2 A_2}{E_2 I_2}} \quad (5.69)$$

sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$u_1(0) = 0 \quad (5.70)$$

$$\left. \frac{du_1}{dx_1} \right|_{x_1=0} = 0 \quad (5.71)$$

$$u_2(L_2) = 0 \quad (5.72)$$

$$E_2 I_2 \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} \Big|_{x_2=L_2} = 0 \quad (5.73)$$

$$u_1(L_1) = u_2(0) \quad (5.74)$$

$$\frac{du_1}{dx_1} \Big|_{x_1=L_1} = \frac{du_2}{dx_2} \Big|_{x_2=0} \quad (5.75)$$

$$E_1 I_1 \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} \Big|_{x_1=L_1} = E_2 I_2 \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} \Big|_{x_2=0} \quad (5.76)$$

$$E_1 I_1 \frac{d^3 u_1}{dx_1^3} \Big|_{x_1=L_1} = E_2 I_2 \frac{d^3 u_2}{dx_2^3} \Big|_{x_2=0} \quad (5.77)$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são os deslocamentos laterais dos diferentes vãos da viga referentes aos sistemas de coordenadas locais  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente (figura 5.71), e  $\omega$  é a frequência natural de vibração. Estabelecendo a condição necessária para que o sistema de equações resultante admita soluções não triviais obtêm-se as frequências naturais de vibração desta viga.

A tabela 5.26 apresenta os dez primeiros autovalores ( $\kappa_1$ ) associados ao vão  $L_1$  da viga, comparando-os com os valores apresentados por Gorman (1975) para os quatro primeiros autovalores.

TABELA 5.26 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DOS AUTOVALORES DA VIGA ENGASTADA-ROTULADA BIMATERIAL

Autovalor $\kappa_1$	Solução analítica	Gorman (1975)
$\kappa_{1,1}$	4,756843	4,757
$\kappa_{1,2}$	8,051925	8,052
$\kappa_{1,3}$	11,902509	11,90
$\kappa_{1,4}$	15,252337	15,25
$\kappa_{1,5}$	19,201487	-
$\kappa_{1,6}$	22,480557	-
$\kappa_{1,7}$	26,450613	-
$\kappa_{1,8}$	29,748947	-
$\kappa_{1,9}$	33,661434	-
$\kappa_{1,10}$	37,053829	-

Segundo Gorman (1975), os modos naturais de vibração dos vãos  $L_1$  e  $L_2$  desta viga são, respectivamente:



$$u_1(x) = \text{sen}(\kappa_1 x_1) - \text{senh}(\kappa_1 x_1) + B_1 [\cos(\kappa_1 x_1) - \cosh(\kappa_1 x_1)] \quad (5.78)$$

$$u_2(x) = A_2 \text{sen}[\theta_V \kappa_1 (L_2 - x_2)] + C_2 \text{senh}[\theta_V \kappa_1 (L_2 - x_2)] \quad (5.79)$$

onde os coeficientes  $B_1$ ,  $A_2$  e  $C_2$  são obtidos pela solução do sistema de equações:

$$\begin{aligned} & B_1 [\cos(\kappa_1 L_1) - \cosh(\kappa_1 L_1)] - A_2 \text{sen}(\theta_V \kappa_1 L_2) - C_2 \text{senh}(\theta_V \kappa_1 L_2) \\ & = \text{senh}(\kappa_1 L_1) - \text{sen}(\kappa_1 L_1) \end{aligned} \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} & B_1 [-\text{sen}(\kappa_1 L_1) - \text{senh}(\kappa_1 L_1)] + A_2 \theta_V \cos(\theta_V \kappa_1 L_2) + C_2 \theta_V \cosh(\theta_V \kappa_1 L_2) \\ & = \cosh(\kappa_1 L_1) - \cos(\kappa_1 L_1) \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$\begin{aligned} & B_1 [-\cos(\kappa_1 L_1) - \cosh(\kappa_1 L_1)] + A_2 \alpha_V^4 \theta_V^2 \text{sen}(\theta_V \kappa_1 L_2) - C_2 \alpha_V^4 \theta_V^2 \text{senh}(\theta_V \kappa_1 L_2) \\ & = \text{senh}(\kappa_1 L_1) + \text{sen}(\kappa_1 L_1) \end{aligned} \quad (5.82)$$

#### 5.4.5.2 MEFG Adaptativo

Os erros relativos das soluções aproximadas obtidas pelo MEFG Adaptativo para este problema são apresentados em escala logarítmica e calculados pela expressão:

$$\text{erro} = \frac{|\kappa_{1h} - \kappa_{1e}|}{\kappa_{1e}} \quad (5.83)$$

onde  $\kappa_{1h}$  é o autovalor  $\kappa_1$  aproximado, associado ao vão  $L_1$  da viga, e  $\kappa_{1e}$  é o autovalor analítico, obtido através da equação (5.68).

São realizadas sete análises adaptativas para determinação das seis primeiras frequências e da décima frequência, utilizando em cada análise a malha mais grosseira capaz de capturar uma primeira aproximação da frequência alvo pelo MEF e representar a geometria da viga.

A figura 5.72 apresenta a evolução do erro relativo do autovalor alvo para as sete análises do MEFG Adaptativo realizadas.

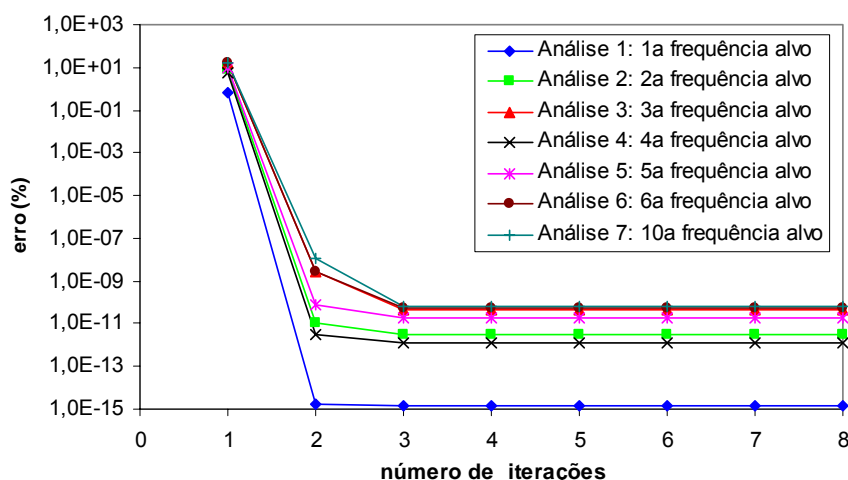


FIGURA 5.72 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES ALVO – VIGA ENGASTADA-ROTULADA BIMATERIAL

Observa-se que, a partir da terceira iteração, o erro relativo do autovalor estabiliza-se com valor inferior a  $10^{-10}$  % em todas as análises.

A tabela 5.27 apresenta os resultados obtidos pelos refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF, pelo refinamento  $c$  do MC, pelo refinamento  $p$  do MEFG Trig e pelas análises do MEFG Adaptativo. A solução pelo MEF  $h$  é obtida com 50 elementos. O MEF  $p$  utiliza dois elementos hierárquicos de nove nós. O MC também utiliza dois elementos e 29 funções enriquecedoras. O MEFG Trig utiliza dois elementos e sete níveis de enriquecimento ( $n_l = 7$ ).

TABELA 5.27 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA BIMATERIAL ENGASTADA-ROTULADA

Autovalor	MEF $h$ (50e) ngl = 99	MEF $p$ (2e 9n) ngl <sup>(a)</sup> = 31	MC $c$ (2e 29c) ngl = 61	MEFG Trig $p$ (2e 7nl) ngl = 31	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(b)</sup>
1	1,703 e-6	4,577 e-17	3,016 e-8	1,131 e-9	1,551 e-15	1x 3 gl + 2x 19 gl
2	1,406 e-5	3,901 e-17	5,081 e-8	7,521 e-9	3,353 e-12	1x 3 gl + 2x 19 gl
3	6,610 e-5	2,850 e-17	4,484 e-7	4,943 e-9	4,452 e-11	1x 3 gl + 2x 19 gl
4	1,794 e-4	1,398 e-16	3,645 e-7	2,824 e-9	1,316 e-12	1x 7 gl + 2x 39 gl
5	4,538 e-4	8,095 e-15	3,081 e-6	1,570 e-8	1,771 e-11	1x 7 gl + 2x 39 gl
6	8,306 e-4	9,008 e-13	1,150 e-5	3,071 e-8	5,471 e-11	1x 7 gl + 2x 39 gl
10	5,918 e-3	1,067 e-6	1,127 e-4	1,894 e-7	6,909 e-11	1x11 gl + 2x 59 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;  
(b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Os resultados do MEFG Adaptativo foram mais precisos que os obtidos pelos refinamentos  $h$  do MEF e pelo refinamento  $c$  do MC, e menos precisos que os obtidos pelo refinamento  $p$  do MEF com 31 graus de liberdade. Entretanto, a precisão do MEFG Adaptativo pode ser melhorada com a utilização de malhas mais refinadas.

O MEFG Trig com 31 graus de liberdade apresenta melhor precisão que o refinamento  $h$  do MEF e que o refinamento  $c$  do MC, ambos com número maior de graus de liberdade.

#### 5.4.6 Viga contínua composta por dois materiais diferentes

Neste tópico é estudada a vibração livre de uma viga contínua de três vãos, composta por dois materiais diferentes e com mudanças abruptas da seção transversal, sendo engastada em uma extremidade, livre na outra e com apoios intermediários rotulados nos pontos de descontinuidade da seção transversal (figura 5.73).

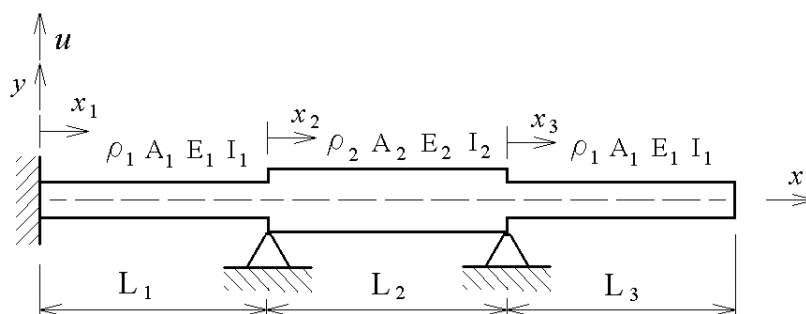


FIGURA 5.73 – VIGA CONTÍNUA BIMATERIAL

O primeiro e o terceiro vãos possuem as mesmas propriedades mecânicas e geométricas. Os vãos da viga têm comprimentos  $L_1 = 0,3$  m,  $L_2 = 0,4$  m e  $L_3 = 0,3$  m, módulos de elasticidade  $E_1$  e  $E_2$ , áreas de seção transversal  $A_1$  e  $A_2$ , e massas específicas  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , com as seguintes relações:

$$\alpha_V = \sqrt[4]{\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}} = \frac{1}{0,9} \quad (5.84)$$

$$\phi_V = \sqrt[4]{\frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1}} = \frac{1}{0,9} \quad (5.85)$$

$$\theta_V = \frac{\phi_V}{\alpha_V} = 1 \quad (5.86)$$

Gorman (1975) apresenta os quatro primeiros autovalores  $\kappa_1$  associados ao primeiro vão e obtidos através da equação (5.68), sendo  $\omega$  a frequência natural de vibração da viga. No citado trabalho também são apresentadas as equações dos modos de vibração livre para os três vãos e o sistema de equações para determinação dos seus coeficientes.

A tabela 5.28 apresenta os resultados obtidos para os quatro primeiros autovalores com a utilização dos refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF, do refinamento  $p$  do MEFG Trig e das análises adaptativas do MEFG. Os resultados destes métodos são comparados com a solução analítica fornecida por Gorman (1975) e com os resultados do Método dos Elementos Finitos Spline (MEFS) proposto por Leung e Au (1990). A solução pelo MEF  $h$  é obtida com 12 elementos. O MEF  $p$  utiliza três elementos hierárquicos de cinco nós. O MEFG Trig utiliza três elementos e dois níveis de enriquecimento ( $n_l = 2$ ). As quatro análises do MEFG Adaptativo utilizam malha formada por três elementos, o que corresponde a uma iteração (MEF) com quatro graus de liberdade e duas iterações subsequentes (MEFG) com 28 graus de liberdade. Devido às diferenças entre os métodos analisados não é possível gerar modelos com número idêntico de graus de liberdade.

Observa-se que o MEFG Adaptativo apresenta a mesma precisão do refinamento  $p$  do MEF com 22 graus de liberdade e resultados mais precisos que o MEFS com 13 graus de liberdade. O MEFG Trig com 16 graus de liberdade também apresenta resultados mais precisos que o MEFS.

TABELA 5.28 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA CONTÍNUA BIMATERIAL

Autovalor	Solução analítica <sup>(a)</sup>	MEF $h$ (12e) ngl = 22	MEF $p$ (3e 5n) ngl <sup>(c)</sup> = 22	MEFS <sup>(b)</sup> ngl = 13	MEFG Trig $p$ (3e 2nl) ngl = 16	MEFG Adap. 1x 4 gl + 2x 28 gl <sup>(d)</sup> (após 3 iterações)
	$K_1$	$K_1$	$K_1$	$K_1$	$K_1$	$K_1$
1	5,183	5,183175	5,183131	5,183	5,183197	5,183131
2	9,364	9,366526	9,364275	9,367	9,367873	9,364275
3	14,01	14,017815	14,009932	14,02	14,014157	14,009932
4	14,99	15,001752	14,992422	15,01	15,001466	14,992422

Notas: (a) resultados apresentados por Gorman (1975);

(b) resultados obtidos por Leung e Au (1990);

(c) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;

(d) primeira iteração (MEF) com 4 graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com 28 graus de liberdade.

#### 5.4.7 Viga engastada-rotulada com variação polinomial de área e inércia

Nesta seção é analisada a vibração livre transversal de uma viga com variação de área e inércia ao longo do seu eixo longitudinal nas formas:

$$A(x) = A_0 (1 + ax)^4 \quad (5.87)$$

$$I(x) = I_{0f} (1 + ax)^4 \quad (5.88)$$

onde  $A_0$  e  $I_{0f}$  são, respectivamente, a área e a inércia da seção transversal em  $x = 0$  e  $a$  é um parâmetro arbitrário.

Abrate (1995) demonstra que a equação governante do movimento desta viga não uniforme pode ser transformada em:

$$EI_{0f} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5.89)$$

sendo

$$w = \psi_V \bar{v} \quad (5.90)$$

$$\psi_V = (1 + ax)^2 \quad (5.91)$$

$$I = I_{0f} \psi_V^2 \quad (5.92)$$

$$A = A_0 \psi_V^2 \quad (5.93)$$

onde  $\bar{v}$  é o deslocamento transversal da viga. Logo, a mudança de variáveis proposta transforma a equação do movimento da viga não uniforme na equação do movimento de uma viga uniforme equivalente, cuja seção transversal apresenta área  $A_0$  e momento de inércia  $I_{0f}$ .

A solução geral espacial do problema de vibração transversal livre da viga não uniforme, com esta distribuição polinomial de área e inércia da seção transversal, é dada por:

$$v(x) = \frac{b_1 \sin(\kappa x) + b_2 \cos(\kappa x) + b_3 \sinh(\kappa x) + b_4 \cosh(\kappa x)}{(1 + ax)^2} \quad (5.94)$$

$$\kappa^4 = \frac{\rho A_0}{EI_{0f}} \omega^2 \quad (5.95)$$

onde  $b_1, b_2, b_3$  e  $b_4$  são constantes e  $\omega$  é a frequência natural de vibração.

Para o caso da viga engastada-rotulada, as condições de contorno para a equação (5.89) são (ABRATE, 1995):

$$w(0, t) = \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = w(L, t) = 0 \quad (5.96)$$

$$\frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = \frac{4a}{1 + aL} \frac{\partial w(L, t)}{\partial x} \quad (5.97)$$

Abrate (1995) apresenta os seis primeiros autovalores adimensionais  $\chi^2 = (\kappa L)^2$  da viga não uniforme engastada-rotulada para  $a = 0, 1$  e  $2$ . A tabela 5.29 apresenta os autovalores analíticos  $\chi^2$  deste problema para o parâmetro  $a = 2$ , comparando-os com os apresentados por Abrate (1995).

TABELA 5.29 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DOS AUTOVALORES DA VIGA ENGASTADA-ROTULADA COM VARIAÇÃO POLINOMIAL DE ÁREA E INÉRCIA

Autovalor $\chi^2$	Solução analítica	Abrate (1995)
1	10,598377	10,5984
2	46,667810	46,6678
3	101,173756	101,174
4	175,304332	175,304
5	269,128147	269,136
6	382,669458	382,669
7	515,937904	-
8	668,938154	-
9	841,672742	-
10	1034,143163	-

O problema é analisado utilizando-se os refinamentos  $h$  e  $p$  do MEF, o refinamento  $p$  do MEFG Trig e o MEFG Adaptativo, considerando o parâmetro  $\alpha = 2$ . A solução pelo MEF  $h$  é obtida com 50 elementos. O MEF  $p$  utiliza um elemento hierárquico de 17 nós. O MEFG Trig utiliza um elemento e 15 níveis de enriquecimento ( $n_l = 15$ ). O MEFG Adaptativo utiliza malhas formadas por dois elementos para as três primeiras análises, três elementos para a quarta e quinta análises e, quatro elementos para a sexta análise. A tabela 5.30 apresenta os resultados obtidos.

TABELA 5.30 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGA ENGASTADA-ROTULADA COM VARIAÇÃO POLINOMIAL DE ÁREA E INÉRCIA

Autovalor	MEF $h$ (50e) ngl = 99	MEF $p$ (1e 17n) ngl <sup>(a)</sup> = 31	MEFG Trig $p$ (1e 15nl) ngl = 31	MEFG Adaptativo (após 3 iterações)	
	erro (%)	erro (%)	erro (%)	erro (%)	ngl nas iterações <sup>(b)</sup>
1	6,702 e-5	2,803 e-14	3,001 e-13	1,626 e-8	1x 3 gl + 2x 19 gl
2	8,686 e-5	2,860 e-13	7,411 e-13	1,940 e-8	1x 3 gl + 2x 19 gl
3	1,575 e-4	9,890 e-13	1,007 e-12	2,136 e-8	1x 3 gl + 2x 19 gl
4	3,010 e-4	1,516 e-12	9,821 e-12	2,017 e-10	1x 5 gl + 2x 29 gl
5	5,654 e-4	2,425 e-12	15,90	9,540 e-10	1x 5 gl + 2x 29 gl
6	1,011 e-3	1,498 e-10	16,14	1,201 e-10	1x 7 gl + 2x 39 gl

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;  
(b) 1x  $n$  gl + 2x  $m$  gl = primeira iteração (MEF) com  $n$  graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com  $m$  graus de liberdade.

Os resultados do MEFG Adaptativo novamente foram mais precisos do que os obtidos pelo refinamento  $h$  do MEF e menos precisos que os obtidos pelo

refinamento  $p$  do MEF com 31 graus de liberdade. Se for utilizada uma malha composta por três elementos (cinco graus de liberdade), os erros do MEFG Adaptativo para os três primeiros autovalores reduzem-se para 5,315 e-11%, 7,027 e-11% e 1,074 e-10%, respectivamente.

O MEFG Trig com 31 graus de liberdade apresenta melhor precisão que o refinamento  $h$  do MEF com número maior de graus de liberdade para os quatro primeiros autovalores. Para os demais autovalores o MEFG Trig apresenta resultados deteriorados, apresentando erros mais elevados.

A figura 5.74 apresenta a evolução do erro relativo do autovalor alvo para as seis análises do MEFG Adaptativo realizadas.

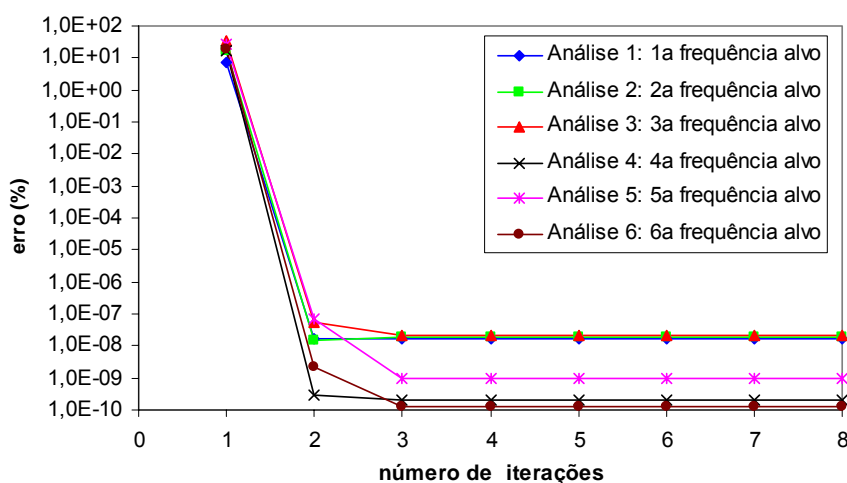


FIGURA 5.74 – ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES – VIGA ENGASTADA-ROTULADA COM VARIAÇÃO POLINOMIAL DE ÁREA E INÉRCIA

Observa-se o mesmo comportamento de convergência dos exemplos anteriores, com erros inferiores a  $10^{-7}$  %.

## 5.5 VIBRAÇÃO LIVRE DE ESTRUTURAS RETICULADAS

Para ilustrar a aplicação de MEFG Adaptativo em estruturas reticuladas, são estudados problemas de vibração livre de treliças e pórticos planos.



### 5.5.1 Trelças planas

Nesta seção são analisados dois problemas de vibração livre em trelças planas através do MEF, do MC e do MEFG. Nestes problemas, o refinamento  $h$  do MEF não se aplica adequadamente, uma vez que para sua aplicação é necessária a adoção de restrições de deslocamentos a cada novo nó da malha para evitar instabilidade do modelo. A solução aproximada obtida através do MEF pode ser melhorada pela aplicação de elementos de barra de ordem superior (refinamento  $p$ ) ou elementos de viga.

#### 5.5.1.1 Trelça composta por sete barras

Inicialmente analisa-se o problema de vibração livre da trelça composta por sete barras proposto por Zeng (1998a). A geometria da trelça está representada na figura 5.75. Todas as barras da estrutura têm as seguintes características: área da seção transversal  $A = 0,001 \text{ m}^2$ , massa específica  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$  e módulo de elasticidade  $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

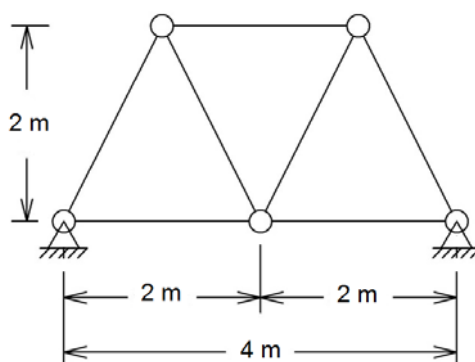


FIGURA 5.75 – TRELIÇA COMPOSTA POR 7 BARRAS

Todas as análises utilizam sete elementos tipo  $C^0$ , o número mínimo necessário para representar a geometria da trelça. São realizadas análises utilizando o MEF linear, o MC e o MEFG com um nível de enriquecimento ( $n_l = 1$ ) e com parâmetro  $\beta_1 = \pi$ . Seis diferentes análises do MEFG Adaptativo são também

realizadas para obter as seis primeiras frequências desta treliça. As frequências obtidas em cada análise estão apresentadas na tabela 5.31. A solução pelo MEF é obtida com sete elementos lineares, ou seja, seis graus de liberdade efetivos. No MC são utilizados sete elementos e uma, duas e cinco funções enriquecedoras, que correspondem a seis graus de liberdade nodais e 7, 14 e 35 graus de liberdade de campo, respectivamente. Todas as análises pelo MEFG Adaptativo utilizam seis graus de liberdade na primeira iteração e 34 graus de liberdade nas duas iterações subsequentes.

TABELA 5.31 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE TRELIÇA PLANA COM 7 BARRAS

	MEF (7e) ngl <sup>(a)</sup> = 6	MC <sup>(b)</sup> (7e 1c) ngl = 13	MC <sup>(b)</sup> (7e 2c) ngl = 20	MC (7e 5c) ngl = 41	MEFG (7e) $n_l = 1, \beta_l = \pi$ ngl = 34	MEFG Adap. <sup>(c)</sup> (7e 3i) 1x 6gl + 2x 34gl
$i$	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)
1	1683,521413	1648,516148	1648,258910	1647,811939	1647,785439	1647,784428
2	1776,278483	1741,661466	1741,319206	1740,868779	1740,840343	1740,839797
3	3341,375203	3119,123132	3113,835167	3111,525066	3111,326191	3111,322715
4	5174,353866	4600,595156	4567,688849	4562,562379	4561,819768	4561,817307
5	5678,184561	4870,575795	4829,702095	4824,125665	4823,253509	4823,248678
6	8315,400602	7380,832845	7379,960217	7379,515018	7379,482416	7379,482322
7		8047,936309	7532,305498	7506,784243	7499,144049	
8		8272,611818	8047,936313	8047,936297	8047,936312	
9		11167,56472	9997,484917	9931,261415	9922,385851	
10		12051,89683	10567,42895	10486,44819	10477,44344	
11		14359,30988	12282,63058	12118,30422	12107,26233	
12		15525,68547	13296,29795	12931,67085	12917,98188	
13		16792,68173	13654,89423	13434,73984	13425,57943	
14			16095,87264	16095,87265	16097,57146	
15			18281,60096	16215,20892	16217,70415	
16			19409,95615	17011,97237	17010,41930	
17			20931,20029	17874,69663	17915,51967	
18			23672,43634	19518,49699	19666,59599	
19			23970,81621	20218,68373	20301,26709	
20			26787,52793	22187,81649	22732,50666	

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;  
 (b) resultados obtidos por Zeng (1998a);  
 (c) primeira iteração (MEF) com 6 graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com 34 graus de liberdade.

Observa-se que o MEFG Adaptativo converge para os mesmos valores que o refinamento  $c$  do MC. O MEFG com parâmetro  $\beta_l = \pi$  apresenta resultados mais

próximos do MEFG Adaptativo do que o MC com número maior de graus de liberdade. Como os métodos aproximados aqui empregados têm como característica a convergência por valores superiores, como mostra a equação (3.26), conclui-se que os resultados obtidos pelo MEFG Adaptativo são mais precisos que os obtidos pelo MC.

Como ilustração, a figura 5.76 apresenta o quarto modo natural de vibração da treliça obtido pelo MEFG Adaptativo. A linha cheia representa a estrutura indeformada enquanto a linha tracejada indica a configuração deformada da treliça.

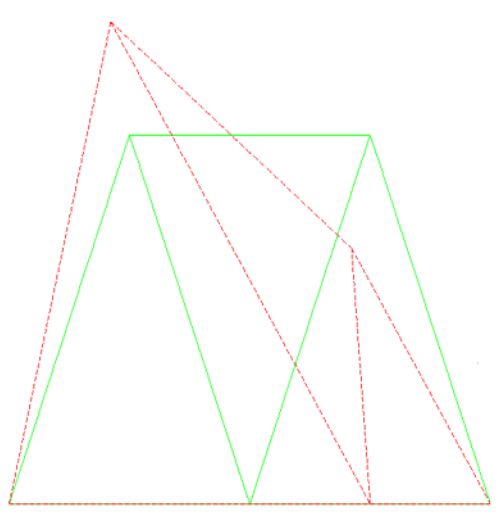


FIGURA 5.76 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA DE 7 BARRAS

#### 5.5.1.2 Treliça composta por 15 barras

O problema de vibração livre da treliça composta por 15 barras, também apresentado no trabalho de Zeng (1998a), é aqui analisado como outra aplicação do MEFG. A geometria da treliça está representada na figura 5.77. Todas as barras da estrutura têm as mesmas características do exemplo anterior.

Todas as análises realizadas utilizam 15 elementos, o número mínimo necessário para representar a geometria da treliça. A solução pelo MEF é obtida com 15 elementos lineares, ou seja, 14 graus de liberdade efetivos. No MC são utilizados 15 elementos e 1, 2, 4 e 6 funções enriquecedoras, que correspondem a

14 graus de liberdade nodais e 15, 30, 60 e 90 graus de liberdade de campo, respectivamente. Todas as análises pelo MEFG Adaptativo utilizam 14 graus de liberdade na primeira iteração e 74 graus de liberdade nas duas iterações subsequentes. Os resultados obtidos estão apresentados na tabela 5.32.

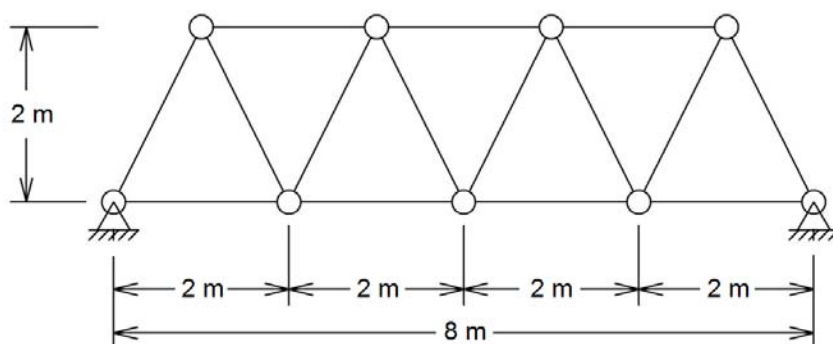


FIGURA 5.77 – TRELIÇA COMPOSTA POR 15 BARRAS

TABELA 5.32 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE TRELIÇA PLANA DE 15 BARRAS

	MEF (15e) ngl <sup>(a)</sup> = 14	MC <sup>(b)</sup> (15e 1c) ngl = 29	MC <sup>(b)</sup> (15e 2c) ngl = 44	MC (15e 4c) ngl = 74	MC (15e 6c) ngl = 104	MEFG Adap. <sup>(c)</sup> (15e 3i) 1x 14gl + 2x 74gl
<i>i</i>	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)
1	682,272384	679,824639	679,821793	679,791992	679,788127	679,786383
2	1149,296348	1139,376074	1139,341796	1139,223267	1139,207727	1139,200586
3	1612,350232	1582,388830	1582,181618	1581,837705	1581,792424	1581,771367
4	2519,866118	2411,837021	2410,250884	2409,132928	2408,982871	2408,911573
5	2715,759047	2604,117985	2601,848419	2600,647590	2600,484076	2600,405466
6	2968,220775	2818,301138	2815,435334	2813,921841	2813,716162	2813,617278
7	3573,361130	3300,489329	3293,258728	3290,816121	3290,475697	3290,308232
8	4207,781031	3824,741153	3811,365219	3808,112160	3807,646059	3807,411395
9	5134,736048	4507,646123	4480,524910	4476,024121	4475,351429	4475,001704
10	5399,565563	4746,383128	4707,913787	4702,826748	4702,039754	4701,621014
11	7163,278724	6189,385029	6069,269438	6060,720374	6059,228964	6058,376768
12	7471,073109	6493,482868	6341,616890	6331,997689	6330,275690	6329,278684
13	7586,074215	6623,729777	6455,516182	6445,563179	6443,724911	6442,644839
14	8462,586195	7386,073478	7381,063755	7380,481418	7380,395797	7380,351301
15		8047,936314	7604,453554	7579,900171	7575,290505	
16		8319,713234	8047,936311	8047,936322	8047,936349	
17		8986,316200	8325,934212	8305,020711	8301,357611	
18		9487,920786	8771,844022	8748,317576	8744,406542	
19		10492,01427	9578,307850	9546,946947	9541,942839	
20		11570,63121	10257,94084	10189,50924	10180,45127	

Notas: (a) ngl = número efetivo de graus de liberdade após imposição das condições de contorno;  
(b) resultados obtidos por Zeng (1998a);  
(c) primeira iteração (MEF) com 14 graus de liberdade e as outras duas iterações (MEFG) com 74 graus de liberdade.

A figura 5.78 apresenta o quinto modo natural de vibração da treliça obtido pelo MEFG Adaptativo. Novamente, a linha cheia representa a estrutura indeformada enquanto a linha tracejada indica a configuração deformada da treliça.

Os resultados mostram que tanto o refinamento  $c$  do MC quanto o MEFG Adaptativo convergem para as mesmas frequências. De forma análoga ao exemplo anterior, pode-se concluir que os resultados obtidos pelo MEFG Adaptativo são mais precisos que os obtidos pelo MC, devido à característica de convergência de ambos por valores superiores às soluções analíticas.

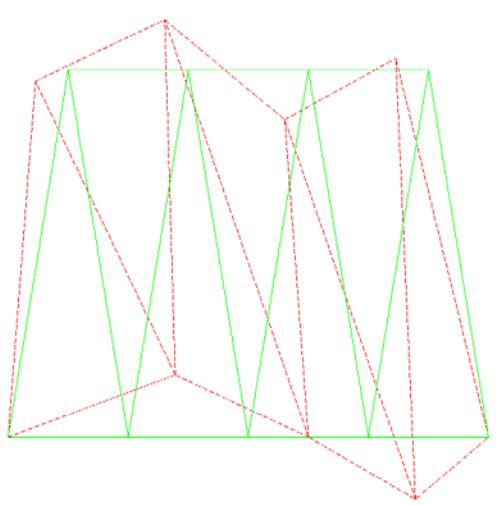


FIGURA 5.78 – QUINTO MODO DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA DE 15 BARRAS

### 5.5.2 Pórticos planos

Como exemplo de aplicação do MEFG Adaptativo em pórticos planos, foi analisado o problema de vibração livre do pórtico formado por quatro barras apresentado no trabalho de Zeng (1998b). A geometria do pórtico está representada na figura 5.79. Todas as barras da estrutura têm as seguintes características: área da seção transversal  $A = 0,1 \text{ m}^2$ , momento de inércia  $I = 1 \times 10^{-2} \text{ m}^4$ , massa específica  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$  e módulo de elasticidade  $E = 1 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ .

São realizadas seis diferentes análises utilizando o MEFG Adaptativo com uma malha de quatro elementos, número mínimo necessário para representar a geometria do pórtico, a fim de obter as seis primeiras frequências naturais da

estrutura. Estas análises correspondem a uma iteração com seis graus de liberdade e duas iterações subsequentes com 54 graus de liberdade cada. Foram realizadas ainda duas análises utilizando o MEF convencional com malhas de quatro elementos (seis graus de liberdade) e 40 elementos (114 graus de liberdade), e duas análises utilizando o MC com uma malha de quatro elementos e, 14 e 30 funções enriquecedoras por elemento (graus de liberdade  $c$ ), respectivamente. Os resultados obtidos para as seis primeiras frequências estão apresentados na tabela 5.33.

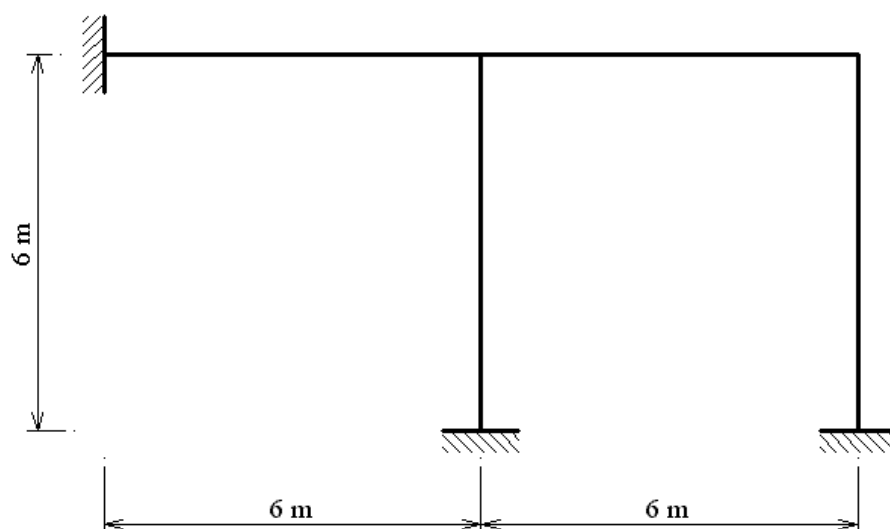


FIGURA 5.79 – PÓRTICO PLANO

TABELA 5.33 – RESULTADOS PARA VIBRAÇÃO LIVRE DE PÓRTICO PLANO

	MEF (4e) ngl = 6	MEF (40e) ngl = 114	MC (4e 14c) ngl = 62	MC (4e 30c) ngl = 126	MEFG Adap. (4e 3i) 1x 6gl + 2x 54gl
$i$	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)
1	12,412232	11,792155	11,791295	11,791255	11,791251
2	14,304731	12,299299	12,298978	12,298965	12,298964
3	19,197774	15,837412	15,836681	15,836628	15,836624
4	26,070176	20,123625	20,121807	20,121732	20,121724
5	31,037720	21,703787	21,700282	21,700112	21,700096
6	41,495314	25,290751	25,282759	25,282180	25,282132

Ao analisar os resultados obtidos, observa-se que o MEFG Adaptativo converge para os mesmos valores que o refinamento  $c$  do MC e que o refinamento  $h$  do MEF.

Para comparar o resultado obtido para frequências mais elevadas, foi realizada outra análise pelo MEFG Adaptativo para obter a 18ª frequência natural do pórtico, com malha de oito elementos, composta por uma iteração com 18 graus de liberdade e duas iterações subsequentes com 114 graus de liberdade cada. A frequência obtida pelo MEFG Adaptativo foi de 113,937557 rad/s, enquanto os resultados obtidos pelo MEF com 114 graus de liberdade e pelo MC com 126 graus de liberdade foram de 114,792083 rad/s e 113,938110 rad/s, respectivamente. Pode-se observar que os resultados foram bastante próximos e que o resultado obtido pelo MEFG Adaptativo é mais preciso, uma vez que os resultados obtidos pelos métodos numéricos utilizados são convergentes por valores superiores aos valores analíticos, como indica a equação (3.26).

Cabe ainda ressaltar que quando se executa uma análise adaptativa para uma determinada frequência alvo são obtidas tantas frequências quantos forem os graus de liberdade do modelo e não apenas a frequência alvo. Utilizando o elemento generalizado de pórtico plano, as frequências que não são alvo no processo iterativo também têm sua precisão melhorada pela inserção das funções enriquecedoras, algumas delas apresentando excelente precisão. Para ilustrar esta característica, as 27 primeiras frequências naturais obtidas pelo MEFG Adaptativo após a terceira iteração, tendo como alvo a primeira frequência e malha formada por quatro elementos, são apresentadas na tabela 5.34 e comparadas aos resultados obtidos pelo MEF com 114 graus de liberdade.

Observa-se na tabela 5.34 que as 25 primeiras frequências obtidas pelo MEFG Adaptativo para a primeira frequência alvo apresentam valores inferiores às obtidas pelo MEF com 114 graus de liberdade, indicando que os resultados do processo adaptativo apresentam melhor precisão que o MEF, devido à característica de convergência por valores superiores. Entretanto, verifica-se que a partir da 26ª frequência os resultados do MEFG Adaptativo já apresentam valores superiores aos obtidos pelo MEF. Conclui-se portanto que, para melhorar a precisão de uma faixa de valores de frequência, dependendo da precisão desejada e da dimensão da faixa

de frequências, pode-se executar apenas uma análise do MEFG Adaptativo, tomando a primeira frequência desta faixa como frequência alvo, a fim de melhorar a precisão de todas as frequências da faixa.

TABELA 5.34 – RESULTADOS DA ANÁLISE DO MEFG ADAPTATIVO PARA 1ª FREQUÊNCIA ALVO

$i$	MEF (40e) ngl = 114	MEFG Adap. (4e 3i) Alvo: 1ª frequência 1x 6gl + 2x 54gl
	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)
1	11,792155	11,791251
2	12,299299	12,298964
3	15,837412	15,836624
4	20,123625	20,121724
5	21,703787	21,700096
6	25,290751	25,282132
7	31,429499	31,410052
8	39,395144	39,352075
9	47,129662	47,108937
10	55,725143	55,649024
11	60,524152	60,398357
12	61,124298	61,077075
13	72,755005	72,431516
14	76,365973	76,067181
15	85,402069	84,968008
16	94,070866	93,530698
17	101,757293	101,474660
18	114,792083	113,955192
19	120,404255	119,229000
20	120,467426	119,886132
21	133,940798	132,328675
22	137,153320	135,588048
23	148,866607	147,429976
24	156,937461	155,002035
25	173,600651	173,568577
26	184,902208	187,878921
27	188,146214	193,369343

Outra alternativa analisada neste caso é a utilização de uma malha mais grosseira do que a sugerida até aqui, utilizando como alvo na segunda iteração do processo adaptativo uma frequência “trampolim” menor do que a frequência desejada.



O teste realizado consistiu em obter a 22ª frequência natural pelo MEFG Adaptativo utilizando uma malha de apenas quatro elementos. Na primeira iteração foi realizada uma análise utilizando o MEF (MEFG com  $n_l = 0$ ) com apenas seis graus de liberdade. Na segunda iteração foi utilizado o MEFG tomando como parâmetro de frequência para as funções enriquecedoras a sexta frequência natural, com um total de 54 graus de liberdade. A partir da terceira iteração o processo seguiu normalmente tomando como alvo a 22ª frequência. A 22ª frequência obtida por este processo alternativo foi de 135,296938 rad/s após a terceira iteração, enquanto o resultado obtido pelo MEF com 114 graus de liberdade foi de 137,153320 rad/s, ou seja, mais preciso que o obtido pelo MEF. Entretanto, este mesmo procedimento quando aplicado para a 54ª frequência (última frequência possível de se obter com a malha e o enriquecimento utilizados) não apresenta convergência.

Salienta-se portanto que o uso de uma frequência “trampolim” pode ser uma alternativa para redução do tamanho do problema de autovalores, que no processo adaptativo para pórticos aumenta 12 graus de liberdade de campo a cada elemento acrescentado à malha de elementos finitos, além dos novos graus de liberdade nodais. Porém é preciso estabelecer para qual faixa de frequência este procedimento pode ser aplicado com garantia de convergência.

A título de ilustração, a figura 5.80 apresenta o quarto modo natural de vibração do pórtico obtido pelo MEFG Adaptativo.

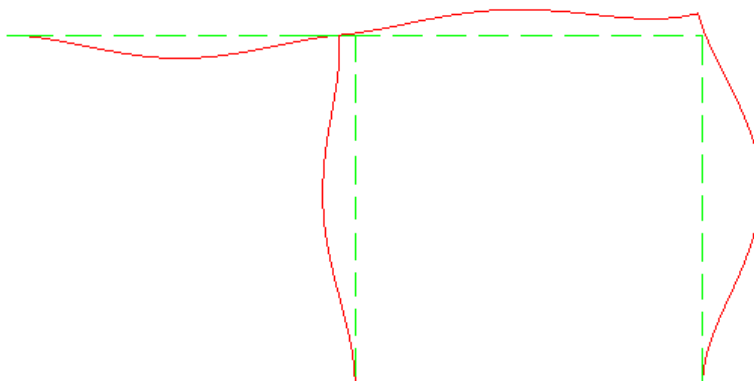


FIGURA 5.80 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DO PÓRTICO

## 6 CONCLUSÃO

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), descrito neste trabalho, consiste em um método de Galerkin que permite a construção de um subespaço de funções de aproximação de dimensão finita que incorpora conhecimento local sobre a solução da equação diferencial do problema através do Método da Partição da Unidade.

No presente trabalho foram apresentadas as formulações variacionais, soluções analíticas e soluções aproximadas relacionadas à vibração livre de estruturas reticuladas planas, além de uma visão abstrata do problema geral de vibração livre de estruturas. As soluções aproximadas pelo MEF convencional e pelos principais métodos enriquecidos apresentados na literatura foram também discutidas. A construção de estimadores de erro para as soluções aproximadas foi apresentada e as taxas de convergência estimadas para o MEF foram posteriormente verificadas através de exemplos numéricos. Foram desenvolvidos refinamentos  $h$ ,  $p$  e adaptativos do MEFG para análise de vibrações livres de barras, eixos, vigas de Euler-Bernoulli e estruturas reticuladas tais como treliças e pórticos. A precisão e o desempenho dos refinamentos do MEFG propostos foram verificados através da análise de diversos exemplos. Também foram apresentadas e desenvolvidas soluções analíticas para diversos dos casos estudados.

A principal contribuição desta pesquisa consiste na formulação e na investigação do desempenho do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) na análise de vibrações livres em estruturas reticuladas. Os elementos de barra e viga de Euler-Bernoulli para o MEFG propostos permitem a introdução das condições de contorno através dos procedimentos convencionais do MEF e utilizam funções de forma mais fáceis de construir do que aquelas do refinamento  $p$  do MEF.

Os resultados obtidos mostram que o refinamento  $p$  do MEFG é bastante preciso e apresenta taxas de convergência maiores do que as obtidas pelos

refinamentos  $h$  do MEF e  $c$  do MC na análise de vibração livre de barras e vigas. Observa-se, entretanto que os últimos autovalores obtidos em cada análise não apresentam boa precisão, deficiência esta também observada em outros métodos enriquecidos, como por exemplo, o MC. Embora o refinamento  $p$  do MEFG tenha apresentado excelentes resultados e taxas de convergência, o refinamento adaptativo do MEFG mostra-se mais promissor, por ser capaz de refinar uma frequência específica com elevada precisão. Por este motivo, neste trabalho foi dada maior ênfase à verificação da eficiência do MEFG Adaptativo.

Na maioria das análises de vibração livre é praticamente impossível obter todas as frequências naturais. Porém, nas análises práticas é suficiente trabalhar com um conjunto de frequências em uma faixa (ou banda), ou com aquelas que têm fator de participação mais significativo na análise. O MEFG Adaptativo permite encontrar uma frequência natural específica com precisão e eficiência computacional, podendo ser então utilizado em repetidas análises a fim de encontrar todas as frequências da faixa de interesse.

No MEFG Adaptativo foram utilizadas funções enriquecedoras que dependem das propriedades geométricas e mecânicas dos elementos. Esta técnica permite um processo adaptativo preciso que converge muito rápido. Além disso, a introdução das condições de contorno de forma direta, como no MEF, e a facilidade de obtenção das funções de forma conferem ao método generalidade para análise de problemas com as mais distintas condições de contorno. Em alguns métodos recentemente propostos, como o MC Modificado (LU; LAW, 2007), é necessário alterar o conjunto de funções de forma dependendo das condições de contorno do problema. Em outros, como o MPU utilizado por De Bel, Villon e Bouillard (2005), e Hazard e Bouillard (2007), a imposição das condições de contorno depende da aplicação de um método de penalidades.

Em todas as análises realizadas o MEFG Adaptativo mostrou rápida convergência, estabilizando-se a partir da terceira iteração com resultados bastante precisos para a frequência alvo. Os resultados têm mostrado que o MEFG

Adaptativo é mais preciso que o refinamento  $h$  do MEF e que o refinamento  $c$  do MC, ambos empregando um número maior de graus de liberdade.

Na grande maioria das análises de vibrações de barras, o MEFG Adaptativo apresentou resultados com precisão semelhante, em alguns casos até mesmo melhor, à obtida pelo refinamento  $p$  do MEF. Além disso, em nenhuma análise utilizando o MEFG Adaptativo observou-se mau condicionamento, problema este que em certos casos impede a utilização do refinamento  $p$  do MEF (LEUNG; CHAN, 1998; RIBEIRO, 2001), embora neste trabalho este tipo de comportamento do refino  $p$  do MEF não tenha sido observado. Observa-se também que no MEFG Adaptativo para barras, apenas a precisão da frequência alvo é efetivamente aumentada pelo processo adaptativo.

O refinamento  $p$  adaptativo do MEFG para barras surge diretamente pelo aumento gradativo do número de níveis de enriquecimento ( $n_l$ ) em cada etapa do processo de refinamento, enquanto no MEFG Adaptativo apenas um nível de enriquecimento é empregado. Este refinamento  $p$  permite melhorar gradativamente a precisão de todas as frequências obtidas na análise, porém, para uma frequência em particular, exige um número maior de graus de liberdade para atingir a mesma precisão do MEFG Adaptativo. O desenvolvimento de um refinamento  $p$  adaptativo semelhante para análise de vibrações em vigas merece investigação futura.

Na análise de vibrações em vigas, os resultados do MEFG Adaptativo apresentaram precisão melhor ou pelo menos semelhante ao refinamento  $p$  do MEF na metade dos casos estudados. Porém, mesmo nos casos em que os resultados foram menos precisos, o erro relativo foi inferior a  $10^{-5}$  %, precisão esta acima da necessária para a maioria dos problemas reais em engenharia. Por outro lado, o MEFG Adaptativo é naturalmente hierárquico, tem sua precisão aumentada pelo refino da malha de elementos finitos e suas funções de forma são mais fáceis de obter do que as do refinamento  $p$  hierárquico do MEF.

No MEFG Adaptativo para vigas a precisão da frequência alvo é efetivamente aumentada pelo processo adaptativo, entretanto, algumas outras

frequências próximas à frequência alvo também apresentam boa precisão. Neste trabalho não foi possível identificar uma dimensão confiável para esta faixa de frequências que apresentam bons resultados. Logo, para garantia de convergência da solução, recomenda-se a execução de uma análise adaptativa para cada frequência alvo desejada. Poucas iterações são necessárias para convergência do método e o número de graus de liberdade empregado é menor do que o necessário para que o refinamento  $h$  do MEF atinja precisão similar para a frequência alvo.

Embora as soluções analíticas para vibração livre de barras e vigas não uniformes não possam ser representadas nos espaços solução em que se baseiam as funções enriquecedoras do MEFG Adaptativo, os resultados obtidos foram bastante precisos mesmo com a utilização de poucos graus de liberdade.

O processo adaptativo também foi aplicado na análise de treliças e de um pórtico, mostrando, em casos mais práticos, resultados convergentes para os mesmos valores que os obtidos pelo MEF e pelo MC.

É importante destacar também que no processo adaptativo composto por três iterações, a solução do problema de autovalores para uma matriz  $n \times n$  e duas matrizes  $2m \times 2m$  exige um número menor de operações que a solução do problema para uma matriz de dimensão  $(n+2m) \times (n+2m)$ . Uma vez que o processo adaptativo requer muito menos graus de liberdade que o refinamento  $h$  do MEF e que o MC, este processo despende um custo computacional menor a fim de obter precisão similar. Para verificar o desempenho numérico, foi utilizado apenas um mesmo número de graus de liberdade que permite uma relação direta com o custo computacional, enquanto o tempo de CPU depende do processador e do código empregado em cada análise.

Sugerem-se futuros trabalhos com o objetivo de explorar mais profundamente a análise funcional aplicada aos problemas aqui analisados e de desenvolver estimadores de erro específicos para o MEFG proposto. O desempenho do MEFG em relação ao refinamento  $p$  do MEF utilizando polinômios ortogonais de Legendre como funções de forma também merece investigação futura.

A eficiência observada neste trabalho indica que MEFG Adaptativo pode ser utilizado com bons resultados, mesmo com malhas grosseiras, na análise de estruturas reticuladas práticas complexas. A sua utilização na análise de estruturas reticuladas reais e a obtenção de altas frequências naturais exige a implementação dos procedimentos numéricos em linguagem mais apropriada do que a aqui empregada, como por exemplo, linguagem C ou Fortran. Observa-se também que a precisão empregada nos cálculos computacionais, tanto na determinação das matrizes de massa e rigidez (integração numérica) quanto na solução do problema de autovalores resultante, afeta a precisão e a convergência do MEFG, dos métodos enriquecidos e do refinamento  $p$  do MEF na análise de vibrações livres. Neste trabalho foi utilizado o software Maple com precisão variando entre 16 e 26 dígitos. Logo, na implementação do MEFG em linguagem de programação deve-se avaliar a necessidade de utilizar bibliotecas matemáticas que permitam precisão arbitrária nas operações, tal como a biblioteca MAPM ("Mike's Arbitrary Precision Math Library") citada por Tang (2003), e ainda computadores equipados com processadores 64 bits. Além disso, a influência da aplicação de métodos numéricos diferentes do método QR na solução do problema de autovalores sobre a precisão dos resultados obtidos pelo MEFG merece investigação adicional.

Outras funções enriquecedoras tais como funções de Bessel e termos da série de Fourier podem ainda ser investigadas na tentativa de melhorar a precisão do MEFG nas análises de barras e vigas não uniformes. O MEFG Trig também merece ser futuramente analisado, porque os resultados obtidos são bons e o método permite adaptatividade. Além disso, o desenvolvimento de métodos de adaptatividade simultânea para análise de faixas de frequências e refinamentos  $hp$ , onde além do acréscimo de novos níveis de enriquecimento a malha seja refinada em função do número de onda (autovalor) da iteração anterior, apresenta-se como desafio futuro.

Ainda no campo da análise dinâmica pode-se pesquisar a inclusão do amortecimento nas análises de vibração livre e desenvolver novos elementos e

processos adaptativos do MEFG para análise de vibrações livres de placas e cascas. Sugere-se ainda investigar a aplicabilidade do MEFG na análise transiente, na análise dinâmica pelo método da superposição modal e na solução de problemas no domínio da frequência. O MEFG também apresenta grande potencial de aplicação em problemas como a instabilidade das estruturas, matematicamente semelhante ao problema de vibrações, e a identificação de trincas em vigas, entre outros.

## REFERÊNCIAS

ABDELAZIZ, Y.; HAMOUIE, A. A survey of the extended finite element. **Computers and Structures**, v. 86, p. 1141-1151, 2008.

ABRATE, S. Vibration of non-uniform rods and beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 185, n. 4, p. 703-716, 1995.

ARNDT, M. , MACHADO, R. D. , HECKE, M. B. An introduction to the composite element method applied to the vibration analysis of trusses. **Shock and Vibration**, v. 9, p. 155-164, 2002(a).

ARNDT, M. , MACHADO, R. D. , HECKE, M. B. Comparative analysis of c and p refinements in the composite element method. **Third Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering**, 2002(b).

ARNDT, M. , MACHADO, R. D. , HECKE, M. B. The composite element method applied to free vibration analysis of trusses and beams. **Applied Numerical Mathematics**, v. 47, p. 59-73, 2003.

ARNDT, M. , MACHADO, R. D. , HECKE, M. B. Hierarchical methods applied to free vibration of Euler-Bernoulli beams. **18th International Congress of Mechanical Engineering**, 2005, Ouro Preto.

ARNDT, M. , MACHADO, R. D. , SCREMIN, A. The generalized finite element method applied to free vibration of uniform straight bars. **19th International Congress of Mechanical Engineering**, 2007, Brasília.

ARNDT, M. , MACHADO, R. D. , SCREMIN, A. Hierarchical generalized finite element analysis of free vibration of bars. **V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**, 2008a, Salvador.

ARNDT, M. , MACHADO, R. D. , SCREMIN, A. Generalized finite element method for vibration analysis of bars and trusses. **XXIX Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia**, 2008b, Maceió.

AUCIELLO, N. M.; ERCOLANO, A. Exact solution for the transverse vibration of a beam a part of which is a taper beam and other part is a uniform beam. **International Journal of Solids and Structures**, v. 34, n. 17, p. 2115-2129, 1997.

AUGARDE, C. E. Generation of shape functions for straight beam elements. **Computers and Structures**, v. 68, p. 555-560, 1998.

BABUSKA, I., BANERJEE, U.; OSBORN, J. E. On principles for the selection of shape functions for the generalized finite element method. **Technical Report 01-16, TICAM**, University of Texas at Austin, 2001.

BABUSKA, I., BANERJEE, U.; OSBORN, J. E. Survey of meshless and generalized finite element methods: a unified approach. **Technical Report 02-40, TICAM**, University of Texas at Austin, 2002.



BABUSKA, I., BANERJEE, U.; OSBORN, J. E. Generalized finite element methods: main ideas, results, and perspective. **Technical Report 04-08, TICAM**, University of Texas at Austin, 2004.

BABUSKA, I., ZANG, Z. The partition of unity method for the elastically supported beam. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 152, p. 1-18, 1998.

BATHE, K. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite elements**. New Jersey: Prentice-Hall, 1981. v. 1: An introduction.

BREBBIA, C. A.; NARDINI, D. Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 2, n. 4, p. 228-233, 1983.

CAMPION, S. D.; JARVIS, J. L. An investigation of the implementation of the p-version finite element method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 23, p. 1-21, 1996.

CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite elements**. New Jersey: Prentice-Hall, 1984(a). v. 2: A second course.

CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite elements**. New Jersey: Prentice-Hall, 1984(b). v. 3: Computational aspects.

CHANG, T-C.; CRAIG, R. R. Normal modes of uniform beams. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 95, n. EM4, p. 1027-1031, 1969.

CHEN, D. An exact solution for free torsional vibration of a uniform circular shaft carrying multiple concentrated elements. **Journal of Sound and Vibration**, v. 291, p. 627-643, 2006.

CHESSA, J.; BELYTSCHKO, T. A local space-time discontinuous finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 1325-1343, 2006.

CHEUNG, Y. K.; AU, F. T. K.; ZHENG, D. Y. Finite strip method for the free vibration and buckling analysis of plates with abrupt changes in thickness and complex support conditions. **Thin-Walled Structures**, v. 36, p. 89-110, 2000.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering**. New Jersey: Prentice Hall, 1995.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. New York: McGraw-Hill, 1975.

CRAIG, R. R. **Structural dynamics: an introduction to computer methods**. New York: John Wiley, 1981.

DE, S.; BATHE, K. J. The method of finite spheres with improved numerical integration. **Computers and Structures**, v. 79, p. 2183-2196, 2001.

DE BEL, E.; VILLON, P.; BOUILLARD, PH. Forced vibrations in the medium frequency range solved by a partition of unity method with local information. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, p. 1105-1126, 2005.

DE ROSA, M. A.; AUCIELLO, N. M. Free vibrations of tapered beams with flexible ends. **Computers and Structures**, v. 60, n. 2, p. 197-202, 1996.

DIMAROGONAS, A. **Vibration for engineers**. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

DOLBOW, J. E. **An extended FEM with discontinuous enrichment for applied mechanics**. Evanston, 1999. 189 f. Tese (Doutorado) – Northwestern University.

DUARTE, C. A.; BABUSKA, I.; ODEN, J. T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. **Computers and Structures**, v. 77, p. 215-232, 2000.

DUARTE, C. A.; HAMZEH, O. N.; LISZKA, T. J.; TWORZYDLO, W. W. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 2227-2262, 2001.

DUARTE, C. A.; KIM, D.-J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, p. 487-504, 2008.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An *h-p* adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 237-262, 1996.

ENGELS, R. C. Finite element modeling of dynamic behavior of some basic structural members. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 114, p. 3-9, 1992.

FAN, S. C.; LIU, X.; LEE, C. K. Enriched partition-of-unity finite element method for stress intensity factors at crack tips. **Computers and Structures**, v. 82, p. 445-461, 2004.

FRIEDRICH, R. Finite strip method: 30 years: a bibliography (1968-1998). **Engineering Computations**, v. 17, n. 1, p. 92-111, 2000.

GANESAN, N.; ENGELS, R. C. Hierarchical Bernoulli-Euler beam finite elements. **Computers & Structures**, v. 43, n. 2, p. 297-304, 1992.

GARTNER, J. R.; OLGAC, N. Improved numerical computation of uniform beam characteristic values and characteristic functions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 84, n. 4, p. 481-489, 1982.

GORMAN, D. J. **Free vibration analysis of beams and shafts**. New York: John Wiley & Sons, 1975.

GRACIE, R.; VENTURA, G.; BELYTSCHKO, T. A new fast finite element method for dislocations based on interior discontinuities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 69, p. 423-441, 2007.

HAN, S. M.; BENAROYA, H.; WEI, T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. **Journal of Sound and Vibration**, v. 225, n. 5, p. 935-988, 1999.

HAZARD, L.; BOUILLARD, P. Structural dynamics of viscoelastic sandwich plates by the partition of unity finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Manuscript accepted, 2007.

INMAN, D. J. **Engineering vibration**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

KHOEI, A. R.; ANAHID, M.; SHAHIM, K. An extended arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for large deformation of solid mechanics. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 44, p. 401-416, 2008.

KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.

KUMAR, B. M.; SUJITH, R. I. Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniform rods. **Journal of Sound and Vibration**, v. 207, n. 5, p. 721-729, 1997.

LADEVEZE, P.; COFFIGNAL, G.; PELLE, J. P. Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis. In: BABUSKA, I.; ZIENKIEWICZ, O. C.; GAGO, J.; OLIVEIRA, E. R. A. **Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations**. New York: John Wiley & Sons, 1986.

LEI, Z.; QIU, C. A dynamic stochastic finite element method based on dynamic constraint mode. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 161, p. 245-255, 1998.

LEUNG, A. Y. T. Integration of beam functions. **Computers & Structures**, v. 29, n. 6, p. 1087-1094, 1988.

LEUNG, A. Y. T. Recurrent integration of beam functions. **Computers & Structures**, v. 37, n. 3, p. 277-282, 1990.

LEUNG, A. Y. T.; AU, F. T. K. Spline finite elements for beam and plate. **Computers & Structures**, v. 37, n. 5, p. 717-729, 1990.

LEUNG, A. Y. T.; CHAN, J. K. W. Fourier  $p$ -element for the analysis of beams and plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 212, n. 1, p. 179-185, 1998.

LEUNG, A. Y. T.; ZHU, B. Fourier  $p$ -elements for curved beam vibrations. **Thin-Walled Structures**, v. 42, p. 39-57, 2004.

LEUNG, A. Y. T.; ZHU, B.; ZHENG, J.; YANG, H. Analytic trapezoidal Fourier  $p$ -element for vibrating plane problems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 271, p. 67-81, 2004.

LI, Q. S. Exact solutions for free longitudinal vibration of stepped non-uniform rods. **Applied Acoustics**, v. 60, p. 13-28, 2000a.

LI, Q. S. Exact solutions for free longitudinal vibration of non-uniform rods. **Journal of Sound and Vibration**, v. 234, n. 1, p. 1-19, 2000b.

LI, Q. S. ; FANG, J. Q.; LIU, D. K. Evaluation of structural dynamic responses by stochastic finite element method. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 8, n. 5, p. 477-490, 1999.

LI, Q. S. ; LI, G. Q.; LIU, D. K. Exact solutions for longitudinal vibration of rods coupled by translational springs. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 42, p. 1135-1152, 2000.

LOW, K. H. An analytical-experimental comparative study of vibration analysis for loaded beams with variable boundary conditions. **Computers & Structures**, v. 65, n. 1, p. 97-107, 1997.

LOW, K. H. On the eigenfrequencies for mass loaded beams under classical boundary conditions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 215, n. 2, p. 381-389, 1998.

LU, Z. R.; HUANG M.; LIU J. K.; CHEN W.H.; LIAO W. Y. Vibration analysis of multiple-stepped beams with the composite element method. **Journal of Sound and Vibration**, 2009, doi:10.1016/j.jsv.2008.11.041.

LU, Z. R.; LAW, S. S. Discussions on composite element method for vibration analysis of structure. **Journal of Sound and Vibration**, v. 305, p. 357-361, 2007.

LU, Z. R.; LAW, S. S. Dynamic condition assessment of a cracked beam with the composite element method. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 23, p. 415-431, 2009.

MACHADO, R. D.; HECKE, M. B.; ARNDT, M.; CARVALHO, N. F.; SANTOS, S. Development of the composite element method to vibration problems. **Fifth World Congress on Computational Mechanics**, 2002.

MACKERLE, J. Finite element vibration analysis of beams, plates and shells: a bibliography (1994-1998). **Shock and Vibration**, v. 6, p. 97-109, 1999.

MACKERLE, J. Finite element vibration and dynamic response analysis of engineering structures: a bibliography (1994-1998). **Shock and Vibration**, v. 7, p. 39-56, 2000.

MAIZ, S.; BAMBILL D.V.; ROSSIT, C. A., LAURA, P. A. A. Transverse vibration of Bernoulli-Euler beams carrying point masses and taking into account their rotatory inertia: exact solution. **Journal of Sound and Vibration**, v. 303, p. 895-908, 2007.

MANGINI, M. **Método dos elementos finitos generalizado para análise de cascas de revolução**. São Carlos, 2006. 132 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo.

MEIROVITCH, L. **Elements of vibration analysis**. International Student Edition. Tokio: McGraw-Hill, 1975.

MELENK, J. M.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1-4, p. 289-314, 1996.

NISTOR, I.; PANTALÉ, O.; CAPERAA, S. Numerical implementation of the extended finite element method for dynamic crack analysis. **Advances in Engineering Software**, v. 39, p. 573-587, 2008.

NORTON, M. P. **Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

ODEN, J. T.; DUARTE, C. A. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. A new cloud-based hp finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 153, p. 117-126, 1998.

PETYT, M. **Introduction to finite element vibration analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

RAJ, A.; SUJITH, R. I. Closed-form solutions for the free longitudinal vibration of inhomogeneous rods. **Journal of Sound and Vibration**, v. 283, p. 1015-1030, 2005.

RAO, S. S. **Mechanical vibrations**. 3 ed. Reading: Addison-Wesley, 1995.

REDDY, B. D. **Functional analysis and boundary-value problems: and introductory treatment**. New York: Longman, 1986.

RIBEIRO, P. Hierarchical finite element analyses of geometrically non-linear vibration of beams and plane frames. **Journal of Sound and Vibration**, v. 246, n. 2, p. 225-244, 2001.

SCHWEITZER, M. A. An adaptive hp-version of the multilevel particle-partition of unity method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2008, doi:10.1016/j.cma.2008.01.009.

SOLÍN, P.; SEGETH, K.; DOLEZEL, I. **Higher-order finite element methods**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004.

STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, p. 43-69, 2000.

STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; HIDAJAT, R. The generalized finite element method for Helmholtz equation: theory, computation and open problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 4711-4731, 2006.

STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 4081-4193, 2001.

STROUBOULIS, T.; HIDAJAT, R.; BABUSKA, I. The generalized finite element method for Helmholtz equation. Part II: effect of choice of handbook functions, error due to absorbing boundary conditions and its assessment. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, p. 364-380, 2008.

STROUBOULIS, T.; ZHANG, L.; WANG, D.; BABUSKA, I. A posteriori error estimation for generalized finite element methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 852-879, 2006.

SUKUMAR, N.; CHOPP, D. L.; MOES, N.; BELYTSCHKO, T. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 6183-6200, 2001.

SUKUMAR, N.; MOES, N.; MORAN, B.; BELYTSCHKO, T. Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, p. 1549-1570, 2000.

TANAKA, M.; MATSUMOTO, T.; SHIOZAKI, A. Application of boundary-domain element method to the free vibration problem of plate structures. **Computers & Structures**, v. 66, n. 6, p. 725-735, 1998.

TANG, Y. Numerical evaluation of uniform beam modes. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 129, n. 12, p. 1475-1477, 2003.

TAYLOR, R. L.; ZIENKIEWICZ, O. C.; ONÁTE, E. A hierarchical finite element method based on the partition of unity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 152, p. 73-84, 1998.

TONGUE, B. H. **Principles of vibration**. 2 ed. New York: Oxford University Press, 2002.

VANMARCKE, E.; GRIGORIU, M. Stochastic finite element analysis of simple beams. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 109, n.5, p. 1203-1214, 1983.

WEAVER JÚNIOR, W.; LOH, C. L. Dynamics of trusses by component-mode method. **Journal of Structural Engineering**, v. 111, n. 12, p. 2565-2575, dez. 1985.

XIAO, Q. Z.; KARIHALOO, B. L. Implementation of hybrid crack element on a general finite element mesh and in combination with XFEM. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 1864-1873, 2007.

YANG, F.; SEDAGHATI, R.; ESMAILZADEH, E. Free in-plane vibration of general curved beams using finite element method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 318, p. 850-867, 2008.

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part I: principle and  $C^0$  element (bar). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 4, p. 619-658, 1998(a).

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part II:  $C^1$  element (beam). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 4, p. 659-696, 1998(b).

ZENG, P. Introduction to composite element method for structural analysis in engineering. **Key Engineering Materials**, v. 145-149, p. 185-190, 1998(c).

ZIENKIEWICZ, O. C.; GAGO, J. P.; KELLY, D. W. The hierarchical concept in finite element analysis. **Computers & Structures**, v. 14, n. 1-4, p. 53-65, 1982.